

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

Ejercicio Resuelto N° 1

Entre los extremos de un condensador esférico se establece una diferencia de potencial de 10 V cargándose con 0,5 μC de electricidad.

Calcular:

- La capacidad del condensador
- El radio del condensador
- La energía almacenada por el condensador

Resolución

a)



$$C = Q / (V_A - V_B) \quad (1)$$

$$Q = 0,5 \mu\text{C} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$V_A - V_B = 10 \text{ V}$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$C = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} / 10 \text{ V} = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

b)

Sabemos que la ecuación de la capacidad de un condensador esférico puede venir dada por la ecuación:

$$C = 4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot R \quad (1)$$

Del apartado a) sabemos:

$$C = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ F}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2 \rightarrow \text{en esta igualdad } C = \text{carga eléctrica} = Q$$

De la ecuación (1):

$$R = C / 4\pi \cdot \epsilon_0$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

luego:

$$R = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ F} / 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$$

$$R = 0,0045 \cdot 10^5 \cdot \text{F} / (\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)$$

Al estar trabajando en el S.I. el resultado tiene que venir en “metros”.

Vamos a demostrarlo:

$$\begin{aligned} \text{F} / (\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) &= (\text{C}/\text{V}) / (\text{C}^2 / \text{N}\cdot\text{m}^2) = \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C} / \text{V} \cdot \text{C}^2 = \\ &= \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{C} / \text{V} \cdot \text{C}^2 = \text{W} \cdot \text{m} / \text{V} \cdot \text{C} \end{aligned}$$

Recordemos que el trabajo eléctrico viene dado por:

$$W = C \cdot V$$

por lo que:

$$= \cancel{W} \cdot \text{m} / \cancel{W} = \text{m}$$

El resultado final es: $R = 4,5 \cdot 10^2 \text{ m} = 450 \text{ m}$

c)

Datos:

$$Q = 0,5 \mu\text{C} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$V = 10 \text{ V}$$

$$E_p = \frac{1}{2} Q^2 / V$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot (0,5 \cdot 10^{-6} \text{ C})^2 / 10 \text{ V} = \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / 10 \text{ V} = 0,0125 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Ejercicio resuelto N° 2

Calcule el diámetro de una esfera aislada para que su capacidad sea de $2,5\mu\text{F}$, siendo el dieléctrico empleado el vacío.

Resolución

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

La capacidad de un conductor esférico viene dada por la ecuación:

$$C = 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R$$

Despejamos R:

$$R = C / 4\pi \cdot \varepsilon_0 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ F} / 4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = \\ = 22469,25 \text{ m}$$

Como el ejercicio pide el diámetro de la esfera:

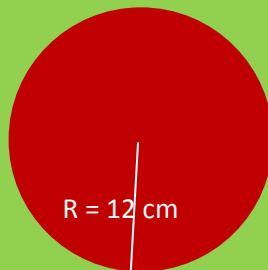
$$D = 2 \cdot R = 2 \cdot 22469,25 \text{ m} = 44938,5 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto N° 3

Determinar la capacidad de una esfera de radio 15 cm. El dieléctrico lo constituye el aire.

Resolución

$$R = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$$



$$C = 4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot R = 4\pi \cdot \varepsilon' \cdot \varepsilon_0 \cdot R$$

$$\varepsilon'_{\text{aire}} = 1$$

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$$

Por lo tanto:

$$C = 4 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot 0,15 \text{ m} = 16,57 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

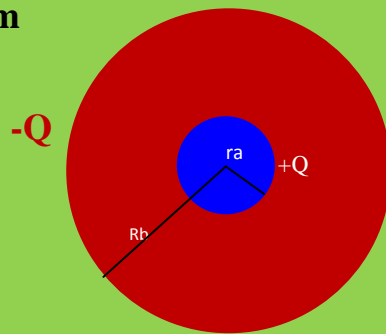
Ejercicio resuelto N° 4

En un condensador esférico lleno de aire los radios de los cascarones interior y exterior miden 9 y 16 cm, respectivamente. a) Determine la capacidad de este dispositivo. b) ¿Cuál tendría que ser la diferencia de potencial entre las cascaras esféricas para obtener una carga de 6 μC ?

Resolución

$$r_a = 9 \text{ cm} = 0,09 \text{ m}$$

$$r_b = 16 \text{ cm} = 0,16 \text{ m}$$



a) Capacidad

$$C = 4\pi\epsilon_0 / (1/r_a - 1/r_b)$$

$$C = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} / (1/0,09 - 1/0,16) = 770 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

b) $V_A - V_B = ?$

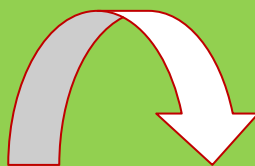
$$Q = 6 \mu\text{C} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$C = Q / (V_A - V_B)$$

despejando ($V_A - V_B$):

$$(V_A - V_B) = Q / C = 6 \cdot 10^{-6} \text{ C} / 770 \cdot 10^{-12} =$$

$$= 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 = 7 \cdot 10^3 \text{ V}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

Ejemplo resuelto N° 5

Tomamos dos esferas conductoras, A y B, totalmente muertas, es decir, están descargadas. Sabemos que una de ellas tiene un radio de 15 cm y la otra de 10 cm. A la esfera A le proporcionamos un potencial de 105 V. Calcular:

- La capacidad de cada esfera.
- El potencial en el estado de equilibrio.
- La carga final de cada una de las esferas así como la carga total del sistema cuando están unidas.
- Energía del sistema antes de la unión de esferas.
- Energía final del sistema.

Resolución

Estableceremos dos Sistemas:

Sistema n° 1.- Antes de unirse las esferas

Sistema n° 2.- Las esferas están unidas

Sistema n° 1:

a)

$$\left. \begin{array}{l} R_A = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m} \\ R_B = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m} \\ V_A = 105 \text{ V} \\ V_B = 0 \end{array} \right\} \text{ Recordar:}$$
$$C = 4\pi \cdot \epsilon' \cdot \epsilon_0 \cdot R$$

$$C_A = 4\pi \cdot \epsilon' \cdot \epsilon_0 \cdot R_A = 4 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,15 = 16,17 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$C_B = 4\pi \cdot \epsilon' \cdot \epsilon_0 \cdot R_B = 4 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,10 = 11,11 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

b) $Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B$
Sistema 1 Sistema 2

$$C_A \cdot V_A + C_B \cdot V_B = (C_A \cdot V + C_B \cdot V)$$

$$16,17 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 105 \text{ V} + 11,11 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 0 = C_A \cdot V + C_B \cdot V$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

$$1697,85 \cdot 10^{-12} \text{ C} = (16,17 \cdot 10^{-12} + 11,11 \cdot 10^{-12}) \cdot V$$

$$1697,85 \cdot 10^{-12} \text{ C} = 27,28 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot V$$

$$V = 1697,85 \cdot 10^{-12} \text{ C} / 27,28 \cdot 10^{-12} \text{ F} = \mathbf{62,23 \text{ V}}$$

- c) La carga final de cada una de las esferas así como la carga total del sistema cuando están unidas.

Sistema 2:

$$Q'_A = C_A \cdot V = 16,17 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 62,23 \text{ V} = \mathbf{1006,25 \cdot 10^{-12} \text{ C}}$$

$$Q'_B = C_B \cdot V = 11,11 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 62,23 \text{ V} = \mathbf{691,37 \cdot 10^{-12} \text{ C}}$$

$$Q'_T = Q'_A + Q'_B = 1006,25 \cdot 10^{-12} \text{ C} + 691,37 \cdot 10^{-12} \text{ C} =$$

$$= \mathbf{1697,62 \cdot 10^{-12} \text{ C} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ C}}$$

- d) Energía del sistema antes de la unión de esferas.

Sistema n° 1:

$$Ep_A = \frac{1}{2} \cdot C_A \cdot V_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 16,17 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (105 \text{ V})^2 = \mathbf{89137,12 \cdot 10^{-12} \text{ J}}$$

$$Ep_B = \frac{1}{2} \cdot C_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 11,11 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 0 \text{ V} = \mathbf{0 \text{ J}}$$

$$Ep_T = \mathbf{89137,12 \cdot 10^{-12} \text{ J}}$$

- e) Energá final del sistema.

Sistema n° 2

$$E'pS = E'pA + E'pB =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 16,17 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 62,23 \text{ V} + \frac{1}{2} \cdot 11,11 \cdot 10^{-12} \cdot 62,23 \text{ V} =$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

$$= 503,12 \cdot 10^{-12} \text{ J} + 345,68 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 848,80 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Ejercicio resuelto N° 6

Queremos conocer las cargas de dos esferas conductoras después de su unión mediante un hilo conductor. La esfera A tiene una capacidad de 6 nF y un potencial de 120 V. La esfera B adquiere un potencial de 60 V después de ser cargado con una carga de 10 nF.

Resolución

Nuestra situación requiere dos **SISTEMAS**:

- SISTEMA 1**: Antes de la unión de las esferas
- SISTEMA 2**: Después de la unión de las dos esferas

Nuestras incógnitas se encuentran en el **Sistema n° 1** pero debemos, obligatoriamente pasar por el **Sistema 2**. Por ejemplo, la **carga que llegue al Sistema 2** va a depender de la **saliente del Sistema 1**:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \quad (1)$$

Sistema 1 Sistema 2

Sistema 1:

$$Q_A = ?$$

$$C_A = 6 \text{ nF} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

$$V_A = 120 \text{ V}$$

Recordemos que:

$$C = Q / V \rightarrow Q = C \cdot V \rightarrow Q_A = C_A \cdot V_A$$

$$Q_A = 6 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 120 \text{ V} = 720 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$Q_B = ?$$

$$C_B = 10 \text{ nF} = 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

$$V_B = 60 \text{ V}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

$$Q_B = C_B \cdot V_B = 10 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 60 \text{ V} = 600 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Como vimos en la ecuación (1):

$$720 \cdot 10^{-9} \text{ C} + 600 \cdot 10^{-9} \text{ C} = Q'_A + Q'_B$$

$$1320 \cdot 10^{-9} \text{ C} = Q'_A + Q'_B$$

Al Sistema nº 2 pasan $1320 \cdot 10^{-9} \text{ C}$ de carga eléctrica.

En el Sistema 2 se establece el “*equilibrio*”, es decir, las dos esferas se encuentran al mismo potencial. La que tiene mayor potencial cederá potencial a la que menos tiene.

Recordemos que:

$$\left. \begin{array}{l} Q'_A = C_A \cdot V_A \text{ (2)} \\ Q'_B = C_B \cdot V_B \text{ (3)} \end{array} \right\} \text{ Dijimos que en el equilibrio } V_A = V_B = V$$

$$1320 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot V + 10 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot V$$

$$1320 \cdot 10^{-9} \text{ C} = (6 \cdot 10^{-9} \text{ F} + 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}) V$$

$$V = 1320 \cdot 10^{-9} \text{ C} / 16 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 82,5 \text{ V}$$

Si nos vamos a las ecuaciones (2) y (3):

$$\left. \begin{array}{l} Q'_A = C_A \cdot V = 6 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 82,5 \text{ V} = 495 \cdot 10^{-9} \text{ C} \\ Q'_B = C_B \cdot V = 10 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 82,5 \text{ V} = 825 \cdot 10^{-9} \text{ C} \end{array} \right\} \text{ Lo que pide el ejercicio}$$

Si sumamos:

$$\begin{aligned} Q'_A + Q'_B &= 495 \cdot 10^{-9} \text{ C} + 825 \cdot 10^{-9} \text{ C} = \\ &= 1320 \cdot 10^{-9} \text{ C} \end{aligned}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES ESFÉRICOS

demostramos que la carga que *llega al Sistema 2* es igual a la carga que *sale del Sistema 1*.

Ejercicio resuelto N° 7

Una esfera totalmente descargada, de radio 12 cm se une mediante un hilo conductor (que no tendremos en consideración para realizar el problema) con otra esfera de potencial de 350 V y diámetro de 40 cm
Determinar:

- Capacidad de las esferas antes de la unión de las mismas.
- El potencial común de las dos esferas alcanzado el equilibrio.
- ¿Se cumple el principio de conservación de la energía?

Resolución

- a) *Sistema 1*: Antes de unir las esferas

$$\left. \begin{array}{l} Q_A = 0 \\ C_A = \\ V_A = 0 \\ R_A = 12 \text{ cm} \\ = 0,12 \text{ m} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{A pesar de la escasez de datos podemos conocer} \\ \text{la capacidad de la esfera:} \\ \\ C_A = 4\pi \cdot \epsilon' \cdot \epsilon_0 \cdot R \end{array}$$

$$C_A = 111,15 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

$$V_B = 350 \text{ V}$$

$$R_B = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \cdot 40 \text{ cm} = 20 \text{ cm} = 0,20 \text{ m}$$

$$C_B = 4\pi \cdot \epsilon' \cdot \epsilon_0 \cdot R = 22,23 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

- b) Se debe cumplir:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B ; C_A \cdot V_A + C_B \cdot V_B = C_A \cdot V + C_B \cdot V$$

$$1,1 \cdot 10^{-10} \text{ F} \cdot 0 \text{ V} + 22,23 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 350 \text{ V} = (C_A + C_B) \cdot V$$

$$7780,92 \cdot 10^{-12} = (111,15 \cdot 10^{-12} \text{ F} + 22,23 \cdot 10^{-12} \text{ F}) \cdot V$$

**EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS DE CONDENSADORES
ESFÉRICOS**

$$V = 7780,92 \cdot 10^{-12} \text{ C} / 133,38 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 58,33 \text{ V}$$

c) $E_{pA} + E_{pB} = E_{p'A} + E_{p'B}$

$$\frac{1}{2} \cdot C_A \cdot V_A^2 + \frac{1}{2} \cdot C_B \cdot V_B^2 = \frac{1}{2} C_A \cdot V_2 + \frac{1}{2} C_B \cdot V^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 11,15 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot 0 \text{ V} + \frac{1}{2} 22,23 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (350 \text{ V})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 111,15 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (58,33 \text{ V})^2 + \frac{1}{2} \cdot 22,23 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot (58,33 \text{ V})^2$$

$$1361587,5 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 189087,76 \cdot 10^{-12} \text{ J} + 37817,55 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$1,36 \cdot 10^{-6} \text{ J} = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ J} + 3,78 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

$$1,36 \cdot 10^{-6} = 0,86 \cdot 10^{-6} \text{ J} + 0,037 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$1,36 \cdot 10^{-6} \neq 0,897 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

No se produce la conservación de la energía.