EJERCICIOS RESUELTOS DE CÁLCULO VECTORIAL

La finalidad de este trabajo implica tres pasos:

a) **Leer el enunciado e intentar resolver el problema sin mirar la solución.**
b) **Si el resultado no es correcto, lo volvéis a intentar. Si de nuevo no nos coincide la solución.**
c) **Mirar el planteamiento del profesor, si lo entendéis fabuloso y si no es así preguntar a vuestro profesor.**

Ubicación de ejercicios por número de página:

Nº EJER.	Nº PÁGI.	Nº EJER.	Nº PÁGI.	Nº EJER.	Nº PÁGI.	Nº EJER.	Nº PÁGI.
1	2	15	9	29	20	42	35
2	2	16	10	30	21	43	38
3	2	17	11	31	22	44	38
4	2	18	13	32	23	45	39
5	3	19	13	32	24	46	40
6	3	20	14	33	25	47	40
7	4	21	14	34	26	48	41
8	4	22	15	35	27	49	41
9	6	23	16	36	28	50	42
10	6	24	17	37	30	51	43
11	7	25	17	38	31	52	44
12	7	26	18	39	32		
13	8	27	19	40	34		
14	8	28	19	41	35		

Ejercicio resuelto Nº 1

Dado el vector $\vec{V}$ de componentes (3,-5), normalizarlo.
Normalizar un vector consiste en ponerlo en función de sus vectores unitarios, es decir, manifestar las componentes del vector V en función de sus componentes según los ejes de coordenadas.

$$\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} + (-5) \cdot \vec{j} \quad ; \quad \boxed{\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}}$$

Ejercicio resuelto Nº 2

Sabiendo que el punto A es A(-3,-2) y que el vector $\vec{AB}$ es $\vec{AB}$ (9,5) determinar las coordenadas del punto B.

Resolución

$\vec{AB} = [\,(x_B - x_A)\,,\,(y_B - y_A)\,]$

$(9,5) = [(x_B - (-3))\,,\,(y_B - (-2))]$

$$\left.\begin{array}{l} 9 = x_B + 3 \;;\; x_B = 9 - 3 = 6 \;;\; x_B = 6 \\ 5 = y_B + 2 \;;\; y_B = 5 - 2 = 3 \;;\; y_B = 3 \end{array}\right\} \text{Punto } B(6,3)$$

Ejercicio resuelto Nº 3

El vector $\vec{AB}$ viene determinado por las componentes (-11,8). Sabemos que el punto extremo es B(-7,5). Determinar el punto origen A

Resolución

$\vec{AB} = [\,(x_B - x_A)\,,\,(y_b - y_A)\,] \;;\; \vec{AB} = [\,(-7 - x_A)\,,\,(5 - y_A)\,]$

$-11 = -7 - x_A \;;\; x_A = 4 \;;\; 8 = 5 - y_A \;;\; y_A = -3 \rightarrow A(4,-3)$

Ejercicio resuelto Nº4

Calcula el valor de *"k"* sabiendo que el módulo del vector $\vec{V}(k,3)$ es 5.

Resolución

$|\vec{v}| = (k^2 + 3^2)^{1/2} \;;\; 5 = (k^2 + 3^2)^{1/2} \;;\; 25 = K^2 + 9 \;;\; k^2 = 16 \;;\; k = \pm 4$

Son válidos los dos valores de *"k"*.

Ejercicio resuelto Nº 5

Normalizar los siguientes vectores: $\vec{u}\,(1, 2^{1/2})$; $\vec{v}\,(-4,3)$ y $\vec{w}\,(8,-8)$.

Resolución

Normalizar un vector consiste en hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido. Por tanto:

a) $\vec{u}\,(1, 2^{1/2})$; $\vec{a}\,(a_x, a_y) \rightarrow \vec{a}\,(a_x,a_y)$ vector unitario de $\vec{u}$

Se cumple:

$$\vec{u} = |\,\vec{u}\,| \cdot \vec{a} \; ; \quad \vec{a} = \vec{u} / |\,\vec{u}\,|$$

$a_x = u_x / |\,\vec{u}\,|$; $a_y = u_y / |\,\vec{u}\,|$

$|\,\vec{u}\,| = [\,1^2 + (2^{1/2})^2\,]^{1/2} \rightarrow |\,\vec{u}\,| = 3^{1/2}$

$a_x = 1 / 3^{1/2}$; $ay = 2^{1/2} / 3^{1/2}$; $a_y = (2/3)^{1/2}$

$\vec{a}\,(a_x,a_y) \rightarrow \vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} \rightarrow \vec{a} = 1/\,3^{1/2}\,\vec{i} + (2/3)^{1/2}\,\vec{j}$

b) Igual a a).
c) Igual a a).

Ejercicio resuelto Nº 6

Clasificar el triángulo determinado por los puntos: A(4,-3) , B(3,0) y C(0,1).

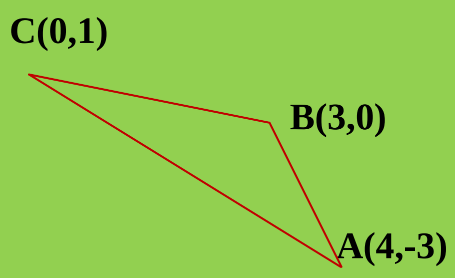
Resolución

Podremos clasificar el triángulo en función de las longitudes de sus lados. Hasta el momento no podemos clasificar el triángulo en función de los ángulos.

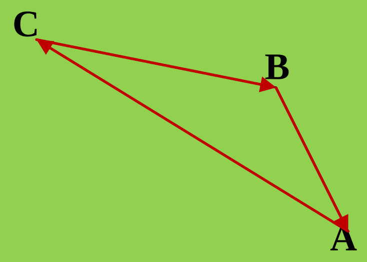
En función de las longitudes de los lados, los triángulos se pueden clasificar en:

a) Equiláteros.- Los tres lados iguales.
b) Isósceles.- Dos lados iguales y uno distinto.
c) Escaleno.- Los tres lados diferentes.

Dicho esto, que nuestro triángulo es:



Podemos transformar el triángulo en tres vectores:



$\overline{CB} = |\overrightarrow{CB}|$; $\overrightarrow{CB}\,[\,(3 - 0)\,,\,(0 - 1)]$; $\overrightarrow{CB}\,(3,-1)$

$\overline{BA} = |\overrightarrow{BA}|$ $\overrightarrow{BA}\,[\,(4 - 3)\,,\,(-3 - 0)\,]$; $\overrightarrow{BA}\,(1,-3)$

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}|$ $AC\,[\,(0 - 4)\,,\,(1 - (-3))]$; $\overrightarrow{AC}\,(-4,4)$

$|\overrightarrow{CB}| = [(3^2 + (-1)^2]^{1/2}$; $|\overrightarrow{CB}| = (10)^{1/2}$

$|\overrightarrow{BA}| = [(1^2 + (-3)^2]^{1/2}$; $|\overrightarrow{BA}| = (10)^{1/2}$

$|\overrightarrow{AC}| = [(-4)^2 + 4^2)]$; $|\overrightarrow{AC}| = (32)^{1/2}$

Conclusión: **Se trata de un tiángulo *Isósceles*.**

Ejercicio resuelto Nº 7

Si $\overrightarrow{V}$ es un vector de componentes (3,4), hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido.

Resolución

Recordemos que:

$\overrightarrow{u}$ = Vector Unitario

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{V} / |\overrightarrow{V}| \rightarrow \overrightarrow{u}\,(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$

$\overrightarrow{V}\,(\overrightarrow{Vx},\overrightarrow{Vy})$

$$|\overrightarrow{V}| = \left[\,|\overrightarrow{Vx}|^2 + |\overrightarrow{Vy}|^2\,\right]^{1/2} \quad ; \quad |\overrightarrow{V}| = [\,(3^2 + 4^2\,]^{1/2} = 5$$

$|\vec{u}_x| = Vx \;/\; |\vec{V}|$; $|\vec{u}_x| = 3/5$

$|\vec{u}_y| = V_y \;/\; |\vec{V}|$; $|\vec{u}_y| = 4/5$

Luego el vector unitario del vector $\vec{V}$ es:

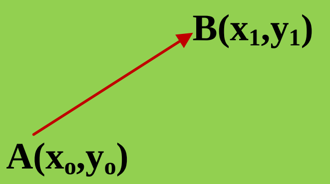
$\vec{u}\,(3/5, 4/5) \rightarrow \boxed{\vec{u} = 3/5\;\vec{i} + 4/5\;\vec{j}}$

Ejercicio resuelto Nº 8

Dado el vector $\vec{u}$ (2,-1), determinar dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, sabiendo que A(1,-3) y D(2,0).

Resolución

Si nos basamos en la equipolencia de vectores tenemos que conocer que los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ tienen el mismo módulo. Esto nos permite establecer:



$\vec{AB}\,[\,(x_1 - 1),\; (y_1 - (-3))\,]$

$\vec{AB}\,[\,(x_1 - 1)\;\; (y_1 + 3)\,]$

Como:

$|\vec{u}| = |\vec{AB}|$; **$\vec{u}$ y $\vec{AB}$ deben tener las mismas componentes:**

$(2,-1) = [\,(x_1 - 1)\,,\,(y_1 + 3)\,]$

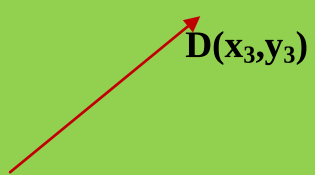
$2 = x_1 - 1$; $x_1 = 2 + 1$; $x_1 = 3$

$-1 = y_1 + 3$; $y_1 = -1 - 3 = -4$; $y_1 = -4$

Luego el punto B es *B(3,-4)*

Por tanto $\vec{AB}$ [(3 – 1),(-4 – (-3))] ; *$\vec{AB}$ (2, -1)*

$\vec{AB} = 2\;i\; - \;j$



$CD\,[(x_3 - x_2),\,(y_3 - y_2)]$

$CD\,[(2 - x_2)\,,\,(0 - y_2)\,]$

Por las mismas razones del vector $\vec{AB}$:

$(2,-1) = [\,(2-x_2),(0-y_2)]$
$2 = 2 - x_2 \;;\; x_2 = 0$
C(x_2, y_2) $-1 = 0 - y_2 \;;\; y_2 = 1$

El punto C será C(0,1) y el vector CB [(2 – 0) , (0 – 1)]

$\overrightarrow{CB}\,(2,-1)\;;\;\overrightarrow{CB} = 2\,i - j$

Ejercicio resuelto Nº 9
Hallar los cosenos directores del vector $\vec{u}$ (2,2,1).

Resolución

$\cos\alpha = u_x / u$

$\cos\beta = u_y / u$

$\cos\delta = u_z / u$

$u = (2^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2} \;;\; u = 3$

$\cos\alpha = 2/3 \;;\; \cos\beta = 2/3 \;;\; \cos\delta = 1/3$

Ejercicio resuelto Nº 10
Dados los vectores $\vec{u}$ (3,1,-1) y $\vec{v}$ (2,3,4), hallar:

a) **Módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **Vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$.**
c) **Cosenos directores de $\vec{v}$,**
d) **Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector $\vec{v}$ es igual a la unidad.**

a) $u = (u^2x + u^2y + u^2z)^{1/2} \;;\; u = (3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2} \;;\; u = (11)^{1/2}$

$v = (v^2x + v^2y + v^2z)^{1/2} \;;\; v = (2^2 + 3^2 + 4^2)^{1/2} \;;\; v = (29)^{1/2}$

b) $u = u \,.\, a \;;\; a$ = vector unitario del vector u

$a = u / u \;;\; a\,(ax,ay,az)$

$ax = 3/(11)^{1/2} \;;\; ay = 1/(11)^{1/2} \;;\; az = -1/(11)^{1/2}$

$\boxed{a = 3/(11)^{1/2}\; i + 1/(11)^{1/2}\; j - 1/(11)^{1/2}\; k}$

c) $\cos\alpha = v_x / v = 2/(29)^{1/2}$

$\cos\beta = v_y / v = 3/(29)^{1/2}$

$\cos\delta = v_z / v = 4/(29)^{1/2}$

d) $[\,2/(29)^{1/2}]^2 + [\,3/(29)^{1/2}]^2 + [\,4/(29)^{1/2}]^2 =$

$= 4/29 + 9/29 + 16/29 = (4 + 9 + 16)/29 = 29/29 = 1$

Ejercicio resuelto Nº 11

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$; $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{K}$ y $\vec{z} = 8\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$, hallar sus módulos y sus cosenos directores.

Resolución

$u = [\,3^2 + (-2)^2 + 3^2]$; $u = (22)^{1/2}$; $u = 4,69$

$v = [\,2^2 + (-6)^2 + 1^2]$; $v = (41)^{1/2}$; $v = 6,4$

$z = [\,8^2 + 1^2 + (-3)^2]^{1/2}$; $z = (74)^{1/2}$; $z = 8,6$

Vector $\vec{u}$:

$\cos\alpha = u_x/u$; $\cos\alpha = 3/4,69$; $\cos\alpha = 0,63$

$\cos\beta = u_y/u$; $\cos\beta = (-2)/4,69$; $\cos\beta = -0,42$

$\cos\delta = u_z/u$; $\cos\beta = 3/4,69$; $\cos\delta = 0,63$

Vectores $\vec{v}$ y $\vec{z}$ igual que $\vec{u}$.

Ejercicio resuelto Nº 12

Calcular el vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}(-1,1,2)$.

Resolución

$v = [\,(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2}$; $v = (6)^{1/2} = 2,44$

Ejercicio resuelto Nº 13

Encuentre el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud sabiendo que su resultante tiene 20 unidades de longitud.

Resolución

Recordar:

$$S = (F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha)^{1/2}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = 10 \text{ udl} \\ F_2 = 15 \text{ udl} \\ S = 20 \text{ udl} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 20^2 = 10^2 + 15^2 + 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos \alpha \\ 400 = 100 + 225 + 300 \cos \alpha \end{array}$$

$$400 - 100 - 225 = 300 \cos \alpha \;\; ; \;\; 75 = 300 \cos \alpha$$

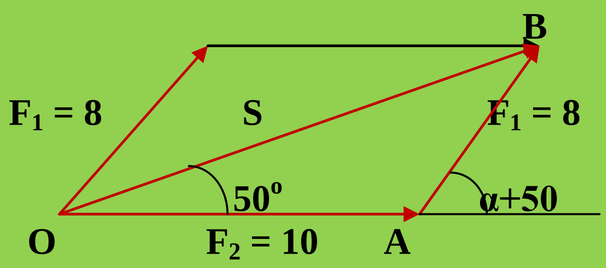
$$\cos \alpha = 75/300 \;\; ; \;\; \cos \alpha = 0{,}25 \rightarrow \alpha = 75{,}5\,^o$$

La pregunta es ¿ si me piden obtener el módulo del vector suma pero parto de las componentes de los dos vectores y no del módulo? Utilizaremos el método Vectorial:

Ejercicio resuelto Nº 14

Encuentre el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50º con el vector mayor.

Resolución



En el triángulo $\widehat{OAB}$ de la figura anterior y por el teorema del coseno:

$$F_1^2 = S^2 + F_2^2 - 2 \cdot S \cdot F_1 \cdot \cos \alpha \;\; ; \;\; 64 = (S^2 + 100 - 2 \cdot S \cdot 10 \cos 50º)^{1/2}$$

$$64 = S^2 + 100 - 12{,}8\, S \;\; ; \quad S^2 - 12{,}8\, S + 36 = 0$$

$$S = 12{,}8 \pm (163{,}84 - 144)^{1/2} \;\; / \; 2$$

$$S = 12{,}8 \pm 4{,}45 \; / \; 2$$

$$S_1 = (12{,}8 + 4{,}45) /2 = 8{,}62$$

$S_2 = (12,8 – 4,45) / 2 = 4,17$

Vectorialmente tomaremos S_1. **Es menor que el valor de F_2 pero mayor que F_1. Lo que no se puede cumplir es que el módulo del vector suma sea inferior al valor de los vectores individualmente.**

Conociendo el valor del S podemos aplicar la ecuación de la suma de dos vectores para obtener un vector resultante S:

$S_2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 . F_1 . F_2 . \cos \alpha$

$8,62^2 = 8^2 + 10^2 + 2 . 8 . 10 . \cos \alpha$

$74,3 = 64 + 100 + 160 . \cos \alpha$

$74,3 – 64 – 100 = 160 \cos \alpha$

$-89,7 = 160 \cos \alpha$; $\cos \alpha = -89,7 / 160$; $\cos \alpha = -0,56$

$$\alpha = 124,1^o$$

Ejercicio resuelto Nº 15

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{z} = 8\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$. Determinar el vector unitario en la dirección y el sentido del vector $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{z}$.

Resolución

$S = (3\, i - 2\, j + 3\, k) + (2\, i - 6\, j + k) + (8\, i + j – 3\, k)$

$S = 13\, i - 7\, j + k$

$S = [(13^2 + (-7)^2 + 1^2)]^{1/2}$; $S = 14,8$

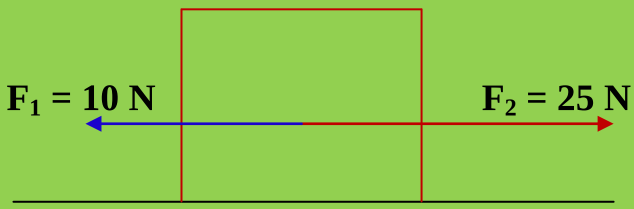
Recordemos que todo vector es igual al módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección y sentido del vector:

$$S = S . u \; ; \; u = S/ S$$

$$u = (13\, i – 7\, j + k)/ 14,8 \; ; \; u = 13/14,8\; i - 7/14,8\; j + 1/14,8\; k$$

Ejercicio resuelto Nº 16

Sobre un cuerpo de masa 500 g actúan dos fuerzas, F_1 y F_2, según el diagrama:



Determinar la el espacio recorrido a los 10 s de iniciado el movimiento.

Cinemáticamente:

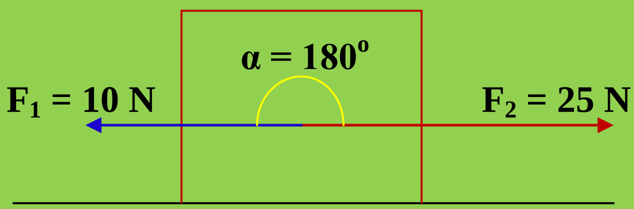
$$e = e_o + Vo \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

como $e_o = 0$ **y** $Vo = 0 \rightarrow \boxed{e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$

Necesitamos conocer la aceleración que aquiere el cuerpo y según el 2º Principio de la Dinámica nos dice:

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

Conocida la fuerza podremos obtener la aceleración. Para obtener la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo volveremos a la gráfica inicial:



Según el diagrama de fuerzas, la fuerza resultante es la diferencia de las dos fuerzas (15 N), pero quiero que veáis como utilizando el *teorema del coseno*, que en una diferencia de vectores no se podía aplicar directamente, nos lleva a ese valor de la fuerza resultante que todos tenéis en mente:

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2. F_2 \cdot F_1 \cdot \cos \alpha)^{1/2}$$

$\alpha = 180^o \rightarrow \cos 180^o = -1$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha)^{1/2}$$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos 180^o)^{1/2}$$

$$F_R = [F_2^2 + F_1^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot (-1)]^{1/2}$$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2)^{1/2}$$

$$F_R = [(F_2 - F_1)^2]^{1/2} \; ; \; \boxed{F_R = F_2 - F_1}$$

La fuerza que actúa sobre el cuerpo vale:

$$F_R = 25 - 10 = 15\ N$$

La aceleración adquirida valdrá:

$$F_R = m \cdot a \; ; \; a = F_R / m \; ; \; a = 15\ N/0{,}500\ Kg \; ; \; a = 30\ m.s^{-1}$$

El espácio recorrido será:

$$e = ½ \cdot a \cdot t^2 \; ; \; e = ½ \cdot 30 \cdot 10^2 = 1500\ m$$

Ejercicio resuelto Nº 17

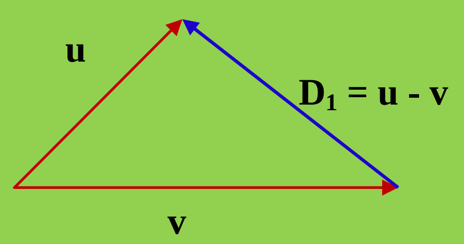
Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - \vec{2}\,j + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$, determinar:

a) **El vector unitario en la dirección y sentido del vector $D_1 = u - v$.**
b) **El vector unitario en la dirección y sentido del vector $D_2 = v - u$**

Resolución

$u = 3\ i - 2\ j + 3\ k$
$v = 2\ i - 6\ j + 1\ k$

a) $D_1 = u - v$



$D_1 = (3\,i - 2\,j + 3\,k) - (2\,i - 6\,j + k) =$
$= (3 - 2)\,i + [(-2 - (-6)]\,j + (3 - 1)\,k =$
$= i + 4\,j + 2\,k$

Recordemos:

$D_1 = D_1 \cdot a$ a = vector unitario de D_1

$a = D_1/D_1$

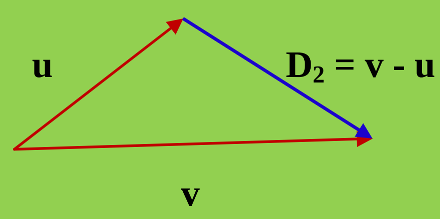
Calculemos el módulo del vector D_1:

$D_1 = (1^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2}$; $D_1 = (21)^{1/2} = 4,58$

$a = (i + 4\,j + 2\,k)/\,4,58$; $a = 1/4,58\,i + 4/4,58\,j + 2/4,58\,k$

$$\boxed{a = 0,21\,i + 0,87\,j + 0,43\,k}$$

b)



$u = 3\,i - 2\,j + 3\,k$
$v = 2\,i - 6\,j + 1\,k$

$D_2 = v - u$
$D_2 = (2\,i - 6\,j + k) - (3\,i - 2\,j + 3\,k)$
$D_2 = (2 - 3)\,i + [(-6) - (-2)]\,j + (1 - 3)\,k$
$D_2 = -\,i - 4\,j - 2\,k$

$D_2 = D_2 \cdot b$; b = vector unitario D_2

$b = D_2/D_2$

$b = (2\,i - 6\,j + k)/D_2$
$D_2 = [(2^2 + (-6)^2 + 1^2)]^{1/2}$; $D_2 = (41)^{1/2} = 6,4$

b = *2/6,4* i - *6/6,4* j + *1/6,4* k

$$\boxed{b = 0{,}31\ i - 0{,}93\ j + 0{,}15\ k}$$

Ejercicio resuelto Nº 18

Dados los vectores: $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$, determinar el modulo de los vectores:

a) $\vec{R} = 2\,\vec{u} - \vec{v} + 3/2\,\vec{w}$
b) $\vec{S} = 1/3\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - 5\,\vec{w}$

Resolución

a) $R = 2\,u - 1\,v + 3/2\,w = 2\,(3\,i - 2\,j + 3\,k) - (2\,i - 6\,j + k) +$
$+ 3/2\,(3\,i - 6\,j + 12\,k) = 6\,i - 4\,j + 6\,k - 2\,i + 6\,j - k +$
$+ 9/2\,i - 18/2\,j + 36/2\,k = (6 - 2 + 9/2)\,i + (-4\,j + 6\,j - 18/2)\,j +$
$+ (6 - 1 + 36/2)\,k = 8{,}5\,i - 7\,i + 23\,k$

$$R = (8{,}5^2 + (-7)^2 + 23^2)^{1/2}$$

$$R = (72{,}25 + 49 + 529)^{1/2} = 650{,}25^{1/2} = 25{,}5$$

b) $S = 1/3\,u + 2\,v - 5\,w$
$S = 1/3\,(3\,i - 2\,j + 3\,k) + 2\,(2\,i - 6\,j + k) - 5\,(3\,i - 6\,j + 12\,k) =$
$= i - 2/3\,j + k + 4i - 12\,j + 2\,k - 15\,i + 30\,j - 60\,k =$
$= (1 + 4 - 15)\,i + (-2/3 - 12 + 30)\,j + (1 + 2 - 60)\,k =$
$= -10\,i + 17{,}34\,j - 57\,k$

$$S = [(-10)^2 + (17{,}34)^2 + (-57)^2]^{1/2} = (100 + 300{,}67 + 3249)^{1/2} =$$
$$= 3649{,}67^{1/2} = 60{,}41$$

Ejercicio resuelto Nº 19

Calcule el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ (5, -2 , 1) y $\vec{B}$ (-1 , 3 , -2).

Resolución

Puesto que el ejercicio no nos determina el ángulo que forman los vectores para poder obtener el producto escalar utilizaremos la ecuación:

$$A \cdot B = AxBx + AyBy + AzBz$$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 5 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = -5 - 6 - 2 = -13$

Ejercicio resuelto Nº 20

Determinar el ángulo que forman los dos vectores del ejercicio anterior

Resolución

Recordemos que:

$$A \cdot B = A \cdot B \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = A \cdot B / A \cdot B \quad (1)$$

El numerador es conocido luego calculemos los módulos de los vectores A y B:

$A = (5^2 + (-2)^2 + 1^2)^{1/2} = 173^{1/2} = 13{,}15$

$B = [(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2]^{1/2} = 14$

Volviendo a la ecuación (1)

$$\cos \alpha = -13/ 13{,}15 \cdot 14 = - 13/ 184{,}1 = - 0{,}07$$

$$\alpha = 94{,}01^{o}$$

Ejercicio resuelto Nº 21

Calcular el valor de "a" para que los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ y $\vec{v} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ formen un ángulo de 45º

Resolución

Recordemos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{v} / u \cdot v \quad (1)$$

De la ecuación anterior conocemos:

$\cos 45^{o} = 0{,}7$

$u = [(3^2 + 4^2 + (-2)^2]^{1/2} = (29)^{1/2} = 5{,}38$

$v = [(a^2 + (-2)^2 + 2^2]^{1/2} = (a^2 + 8)^{1/2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = 3a - 8 - 4 = 3a - 12$

Si nos vamos a (1):

$$0{,}7 = (3a - 12)/\ 5{,}38 \cdot (a^2 + 8)^{1/2}$$

trabajando matemáticamente:

$0{,}7 \cdot 5{,}38 \cdot (a^2 + 8)^{1/2} = 3a - 12$

$(a^2 + 8)^{1/2} = (3a - 12)/\ 0{,}7 \cdot 5{,}38$

$(a^2 + 8)^{1/2} = (3a - 12)/3{,}76$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$a^2 + 8 = (3a - 12)^2/14{,}13 \;\; ; \;\; 14{,}13 \cdot (a^2 + 8) = 9a^2 + 144 - 72a$

$14{,}13\ a^2 + 113{,}04 = 9a^2 + 144 - 72a$

$14{,}13\ a^2 - 9a^2 - 72a + 113{,}04 - 144 = 0$

$5{,}13\ a^2 - 72\ a - 30{,}96 = 0$

$a = 72 \pm (5184 + 635{,}29)^{1/2}/\ 10{,}26$

$a = 72 \pm 76{,}28/10{,}26$

$a_1 = 72 + 76{,}28/10{,}26 = 14{,}45$

$a_2 = 72 - 76{,}28/10{,}26 = -0{,}41$

Ejercicio resuelto Nº 22

Determinar el valor del parámetro "a" para que los vectores $\vec{x} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$; $\vec{y} = -\,\vec{i} + a\,\vec{j} + \vec{k}$ sean perpendiculares.

Resolución

Si los vectores son perpendiculares el ángulo que forman entre ellos es de 90º. Esto implica:

$$x \cdot y = x \cdot y \cdot \cos\alpha$$

$$x \cdot y = x \cdot y \cdot \cos 90º = x \cdot y \cdot 0 = 0$$

Para que dos vectores *sean perpendiculares su producto escalar debe ser igual a cero:*

También sabemos que:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_x y_x + x_y y_y + x_z y_z = 0$$

$$\vec{x} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \;;\quad y = -\vec{i} + a\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$-a - 2a + 3 = 0 \;;\; -3a = -3 \;;\; a = 1$$

Ejercicio resuelto Nº 23 (Fuente Enunciado: Depart. F/Q I.E.S Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado los vectores $\vec{A}(4, -3, 0)$ y $\vec{B}(8, 6, 0)$, calcula:

a) $2\vec{A} + \vec{B}$
b) El producto escalar de $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
c) El ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Resolución

a) $2\vec{A} + \vec{B} = 2(4i + -3j) + (8i + 6j +) =$
$= 8i - 6j + 8i + 6j = 16\,i$

b) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz = 4 \cdot 8 + (-3) \cdot 6 = 32 - 18 = 14$

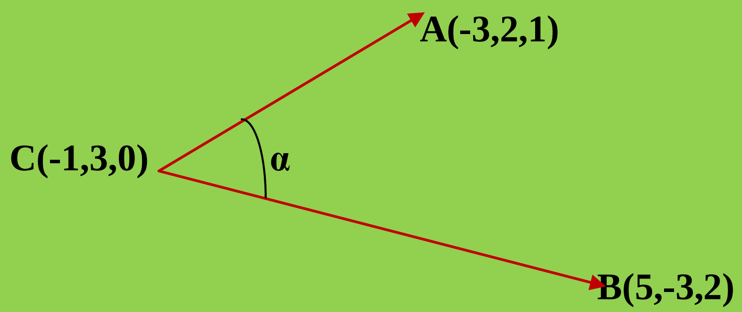
c) $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha \;;\quad \cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} / A \cdot B$

$A = (4^2 + (-3)^2 +)^{1/2} = 25^{1/2} = 5$
$B = (8^2 + 6^2)^{1/2} = 10$

$\cos\alpha = 14 / 5 \cdot 10 \;;\; \cos\alpha = 0{,}28 \rightarrow \alpha = 73{,}73º$

Ejercicio resuelto nº 24 (Fuente Enunciado: Depart. F/Q I.E.S Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)
Dos vectores cuyos extremos son los puntos A(-3,2,1) y B(5,-3,2), tienen como origen común el punto C(-1,3,0). Calcular el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.

Resolución



$\vec{CA}$ [(-3) – (-1) , (2 – 3) , (1 – 0)] ; $\vec{CA}$ (-2 , -1 , 1)

$\vec{CB}$ [5 – (-1) , (-3) – 3 , (2 – 0)] ; $\vec{CB}$ (6 , -6 , 2)

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos\alpha$ (1)

$\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ = CAxCBx + CAyCBy + CAzCBz = (-2).6 + (-1).(-6) + 1.2 =
= -12 + 6 + 2 = *-4*

De (1):

$\cos\alpha = \vec{CA} \cdot \vec{CB} / CA \cdot CB$ (2)

$CA = [(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 6^{1/2} = 2{,}45$
$CB = [6^2 + (-6)^2 + 2^2]^{1/2} = 76^{1/2} = 8{,}72$

Nos vamos a (2):

$\cos\alpha = -4 / (2{,}45 \cdot 8{,}72) = -4/21{,}36 = -0{,}18$; *α = 100,4º*

Ejercicio resuelto Nº 25 (Fuente Enunciado: Depart. F/Q I.E.S Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)
Dados los vectores a = 3 i + 5 j – k y b = i + 4 j – 2 k, calcula el producto escalar siguiente: (a – 5b) . (2 a + 6 b)

Resolución

5 b = 5 (i + 4 j – 2 k) = 5 i + 20 j – 10 k

2 a = 2 (3 i + 5 j – k) = 6 i + 10 j – 2 k
6 b = 6 (i + 4 j – 2 k) = 6 i + 24 j – 12 k

(a – 5 b) = (3 i + 5 j – 2 k) – (5 i + 20 j – 10 k) = - 2 i – 15 j + 8 k
(2 a + 6 b) = 6 i + 10 j – 2 k + 6 i + 24 j – 12 k =
= 12 i + 34 j – 14 k

Luego:

(a – 5 b) . (2 a + 6 b) = (-2) . 12 + (-15) . 34 – 112 = -24 – 510 – 112 =
= *646*

Ejercicio resuelto Nº 26 (Fuente Enunciado: Raúl González Medina. Resolución: A. Zaragoza)

Comprobar que los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k ; $\vec{B}$ = i + 3 j – 5 k y $\vec{C}$ = 2 i – j + 4 k forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Cuando entre dos de los tres vectores dados exista un ángulo de 90º el triángulo será rectángulo. Tenemos que buscar el ángulo de 90º.

$A = [\,3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 3{,}74$
$B = [\,1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 5{,}91$
$C = [\,2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 4{,}58$

Debemos recordar que:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$ (1) y $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$ (2)

Recordemos también que el producto escalar es *conmutativo*. De la ecuación (2) obtenemos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) = 3 + 6 + 5 = 14$
$\vec{A} \cdot \vec{C} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 6 – 2 – 4 = 0$
$\vec{B} \cdot \vec{C} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 = 2 – 3 – 20 = 21$

De la ecuación (1):

$\cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} / A \cdot B$; cos α = 14/ 14 . 5,91 = 14/82,74 = 0,169

α = 80,25º

cos β = $\vec{A}$. $\vec{C}$ / A . C ; cos β = 0/3,74 . 4,58 = 0 ; *β = 90º*

Aquí tenemos el ángulo que estábamos buscando y efectivamente se trata de un triángulo rectángulo.

Ejemplo resuelto Nº 27 **(Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)**
Suponiendo dos vectores cuyos módulos son 7 y 8 respectivamente, y sabiendo que el ángulo que forman es de 30º, calcula el módulo del producto vectorial e indica el ángulo que forma con los dos vectores.

Resolución

Recordemos que:

$$| A \times B | = | A | \cdot | B | \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$| A \times B | = 7 \cdot 8 \cdot \text{sen}\ 30º = 28$$

Por definición, el ángulo que forma con los dos vectores es de *90º*.

Ejemplo resuelto Nº 28
Dados los vectores u (1 , 2 , 3) y v (-1 , 1, 2) calcular:

a) **Su producto vectorial.**
b) **El ángulo que forman los vectores**

Resolución

a)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\,i + k + (-1) \cdot 3 \cdot j - [(-1) \cdot 2 \cdot k + 3\,i + 2\,j = 4\,i + k - 3\,j + 2\,k - 3\,i - 2\,j = \vec{i} - 5\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$$

b) $| \vec{A} \times \vec{B} | = A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$; $\text{sen}\ \alpha = | \vec{A} \times \vec{B} | / A \cdot B$ **(1)**

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = [\,1^2 + (-5)^2 + 3^2]^{1/2} = 35^{1/2} = 5{,}9$$

$$A = (\,1^2 + 2^2 + 3^2\,)^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$$

$$B = [\,(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2} = 6^{1/2} = 2{,}45$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$\text{sen}\ \alpha = |\,A \times B\,| \,/\, A \,.\, B \quad ; \quad \text{sen}\ \alpha = 5{,}9 \,/\, 3{,}74 \,.\, 2{,}45$$

$$\text{sen}\ \alpha = 5{,}9 / 9{,}16 = 0{,}64 \rightarrow \alpha = 39{,}79^o$$

Ejemplo resuelto Nº 29

Dado los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = i + j + k$, hallar el producto vectorial de dichos vectores y comprobar que el vector obtenido es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} = -\,i + 3\,k + j - [(-k) + i + 3\,j] = \\ = -\,i + 3\,k + j + k - i - 3j = \\ = -\,2\,i - 2\,j + 4\,k \end{array}$$

$$\text{sen}\ \alpha = |\,A \times B\,| \,/\, A \,.\, B \quad (1)$$

$$p = [\,(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2]^{1/2} = 24^{1/2} = 4{,}89$$

$$A = [\,(\,3)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$$

$$B = (\,1^2 + 1^2 + 1^2\,)^{1/2} = 3^{1/2} = 1{,}73$$

Para calcular el ángulo que forma el vector producto vectorial con los vectores dados tenemos que trabajar independientemente con cada uno de ellos, es decir, p $\perp$ A y p $\perp$ B:

p . A = p . A . cos β ; (-6 + 2 +4) = 4,89 . 3,31 . cos β

0 = 16,18 . cos β ; cos β = 0 / 16,18 = 0 → *β = 90º*

p . B = p . B . cos μ ; [(-2) + (-2) + 4] = 4,89 . 1,73 . cos μ

0 = 8,45 cos μ ; cos μ = 0 → *μ = 90º*

Ejemplo resuelto Nº 30 **(Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)**

Dado los vectores $\vec{A}$ (2, -1, 1) y $\vec{B}$ (-1, 2, 1), calcular:

a) $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$
b) $\vec{C} \cdot \vec{A}$ Discutir este último resultado y predecirlo sin calcularlo previamente

Resolución

a)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right| = -i + 4k - j - (k + 2i + 2j) =$$

$$= -i + 4k - j - k - 2i - 2j =$$

$$= -3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

b) $\vec{C} \cdot \vec{A}$ → se trata de un producto escalar de dos vectores que como resultado se obtiene otro escalar. En este caso en concreto el vector $\vec{C}$ y el vector $\vec{A}$ son perpendiculares por las características de C. El producto escalar tiene la expresión:

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = C \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Como α = 90º → cos 90º = 0, luego $\vec{C} \cdot \vec{A} = 0$

Ejercicio resuelto Nº 31

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$, hallar:

a) **El producto $\vec{u} \times \vec{v}$.**
b) **El producto $\vec{v} \times \vec{u}$.**
c) **Compara los resultados anteriores.**

Resolución

a) $\vec{u} = 3\,i - j + k \;;\; \vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = -\,i - 9\,k + 2\,j - [(-2)\,k + (-3)\,i + 3\,j] =$$

$$= -\,i - 9\,k + 2\,j + 2\,k + 3\,i - 3\,j =$$

$$= 2\,i - j - 7\,k$$

b)

$$\vec{s} = \vec{v} \times \vec{u} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \end{array}\right| = -\,3\,i - 2\,k + 3\,j - (-9\,k - i + 2\,j) =$$

$$= -\,3\,i - 2\,k + 3\,j + 9k + i - 2\,j =$$

$$= -\,2\,i + j + 7\,k$$

c) Los vectores obtenidos son:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = 2\,i - j - 7\,k \\ \vec{s} = -2\,i + j + 7\,k \end{array}\right\}$$

Se cumple que $\vec{p} = -\,\vec{s}$

Hemos obtenidos dos vectores opuestos que se caracterizan por:

a) **Tener el mismo módulo.**

b) La misma dirección.
c) Sentido contrario.

Ejercicio resuelto Nº 32

Dados los vectores $\vec{u}$ (3, 1, -1) y $\vec{v}$ (2, 3, 4), hallar:

a) Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.
c) Un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución

a) $u = [\, 3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$

$v = (\, 2^2 + 3^2 + 4^2\,)^{1/2} = 29^{1/2} = 5{,}38$

b)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \end{array} \right| = 4\,i + 9\,k - 2\,j - (\,2\,k - 3\,i + 12\,j) =$$

$$= 4\,i + 9\,k - 2\,j - 2\,k + 3\,i - 12\,j =$$

$$= 7\,i - 14\,j + 7\,k$$

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector que le vamos a llamar $\vec{p}$. Este vector $\vec{p}$, por teoría es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego sólo nos hace falta calcular el vector unitario a $\vec{p}$:

$$\vec{p} = p \cdot \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \text{vector unitario al vector } p$$

$$\vec{a} = \vec{p}\,/\,p \quad (1)$$

$p = [\, 7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 470596^{1/2} = 686$

Si nos vamos a (1):

$\vec{a} = (\,7\,i - 14\,j + 7\,k\,)\,/\,686 \;\; ; \;\; \vec{a} = 7/686\; i - 14\,/\,686\; j + 7\,/\,686\; K$

Ejercicio resuelto Nº 32

Hallar dos vectores de módulo la unidad y perpendiculares a (2, -2, 3) y (3, -3, 2).

Resolución

$\vec{u} = 2\,i - 2\,j + 3\,k \;\; ; \;\; \vec{v} = 3\,i - 3\,j + 2\,k$

Por definición sabemos que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a los dos vectores.

$\vec{u} = 2\,i - 2\,j + 3\,k \;\; ; \;\; \vec{v} = 3\,i - 3\,j + 2\,k$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -4\,i - 6\,k + 9\,j - (-6\,k - 9\,i + 4\,j) =$$

$$= -4\,i - 6\,k + 9\,j + 6\,k + 9\,i - 4\,j =$$

$$= 5\,i + 5\,j + 0\,k$$

$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{u}$ **= es el vector opuesto al vector $\vec{p}$, como vimos en ejemplo anterior, luego $\vec{r} = -5\,i - 5\,j - 0\,k$.**

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores que cumplen las siguientes condiciones:

a) **Son perpendiculares a los vectores u y v.**
b) **Tienen el mismo módulo.**
c) **Tienen la misma dirección.**
d) **Sentido contrario.**

Los vectores unitarios serán:

$\vec{p} = p \cdot \vec{a}$

$\vec{a}$ = vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{p}$

$p = (5^2 + 5^2 + 0^2)^{1/2} = 50^{1/2} = 7{,}07$

$\vec{a} = \vec{p} / p \;\; ; \;\; \vec{a} = (5\,i + 5\,j + 0\,k) / 7{,}07 = 5/7{,}07\,i + 5/7{,}07\,j$

$\vec{r} = r \cdot \vec{b}$; $\vec{b}$ = vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$

$r = [(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2]^{1/2} = 7{,}07$

$\vec{b} = \vec{r} / r$; $b = (-5\,i - 5\,j - 0\,k)/7{,}07$; $b = -5/7{,}07\,i - 5/7{,}07\,j$

Ejemplo resuelto Nº 33 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

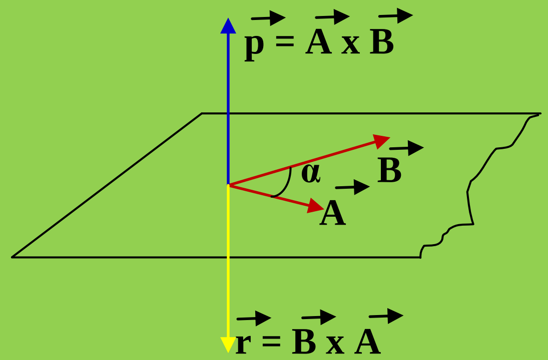
Dados los vectores $\vec{A}$ (3, -2, 2) y $\vec{B}$ (0, 2, 1); calcula los vectores de módulo 3 y perpendiculares a ambos vectores.

Resolución

Como sabemos, el producto vectorial de dos vectores es *otro vector perpendicular a los dos primeros*. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} \\ \vec{r} = \vec{B} \times \vec{A} \end{array}\right\}$$

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores *PERPENDICULARES* a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y entre ellos son del mismo módulo, de la misma dirección y de sentido contrario, es decir, son *vectores opuestos*.



Se cumple que: $\vec{p} = -\vec{r}$

Calculemos $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right| = -2\,i + 6\,k - (4\,i + 3\,j) =$$

$$= -2\,i + 6\,k - 4\,i - 3\,j =$$

$$= -6\,i - 3j + 6\,k$$

$\vec{p} = -6\,i - 3\,j + 6\,k \rightarrow \vec{r} = 6\,i + 3\,j - 6\,k$

Vamos a proceder a calcular los vectores unitarios de $\vec{p}$ y $\vec{r}$, luego los multiplicaremos por un escalar, *3*, obtendremos los vectores que nos pide el ejercicio:

$p = -6\,i - 3\,j + 6\,k \rightarrow r = 6\,i + 3\,j - 6\,k$

$p = [(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

$r = [\,6^2 + 3^2 + (-6)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

Todo vector es igual a su modulo por el vector unitario en la dirección y sentido del mismo:

$\vec{p} = p \,.\, \vec{a}$; **a es el vector unitario en la dirección y sentido de p**

$\vec{r} = r \,.\, \vec{b}$; **b " " " " r**

$\vec{a} = \vec{p} \,/\, p$; $a = (-6\,i - 3\,j + 6\,k) / 9$; $a = -6/9\,i - 3/9\,j + 6/9\,K$

$\vec{a} = -2/3\,i - 1/3\,j + 2/3\,k$

$\vec{b} = \vec{r} \,/\, r$; $\vec{b} = (6\,i + 3\,j - 6\,k) / 9$; $\vec{b} = 6/9\,i + 3/9\,j - 6/9\,k$

$\vec{b} = 2/3\,i + 1/3\,j - 2/3\,k$

$\vec{S}$ y $\vec{T}$ son los vectores que nos pide el problema y para ello:

$\vec{S} = 3 \,.\, \vec{a}$; $\vec{S} = 3 \,.\, (-2/3\,i - 1/3\,j + 2/3\,k)$; $\vec{S} = -2\,i - j + 2\,k$

$\vec{T} = 3 \,.\, b$; $\vec{T} = 3 \,.\, (2/3\,i + 1/3\,j - 2/3\,k)$; $\vec{T} = 2\,i + j - 2\,k$

Ejemplo resuelto Nº 34 (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado los vectores A (4, -3, 0) y B (8, 6, 0), calcula:

a) 2 A + B
b) Un vector de modulo 1 en la dirección de A.
c) El producto escalar A . B
d) El ángulo que forman A y B
e) El producto vectorial de A x B
f) El módulo del producto vectorial A x B

Resolución

a) $2\vec{A} + \vec{B} = 2 \cdot (4, -3, 0) + (8, 6, 0) = (8, -6, 0) + (8, 6, 0) = 16\,i$

b) $\vec{A} = A \cdot \vec{u}$; $\vec{u} = \vec{A} / A$

$A = [4^2 + (-3)^2 + 0^2]^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

$\vec{u} = (4, -3, 0) / 5$; $\vec{u} = (4/5, -3/5, 0)$

c) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$ A (4, -3, 0) y B (8, 6, 0)

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \cdot 8 + (-3) \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 32 - 18 + 0 = 14$

d) $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$ (1); $\vec{A} \cdot \vec{B} = 14$ (2)

$B = (8^2+6^2+0^2)^{1/2} = 10$

$A = 5$

Utilizando las ecuaciones (1) y (2):

$$14 = 5 \cdot 10 \cdot \cos\alpha \;;\; \cos\alpha = 14 / 50 = 0{,}28$$

$$\alpha = 73{,}73^o$$

e)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ i & j & k \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 24\,k - (-24\,k) = 48\,K$$

e) $|\vec{A} \times \vec{B}| = (48^2)^{1/2} = 48$

Ejercicio resuelto Nº 35

Dados los vectores $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$ y $\vec{B} = 6\,i - 3\,j + 2\,k$, calcular:

a) El ángulo que forman los dos vectores.
b) Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$.
c) Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Resolución

a) Datos necesarios:

$A = [3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$

$$B = [\,6^2 + (-3)^2 + 2^2]^{1/2} = 49^{1/2} = 7$$

Recordemos que:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

luego: $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$ y $\vec{B} = 6\,i - 3\,j + 2\,k$

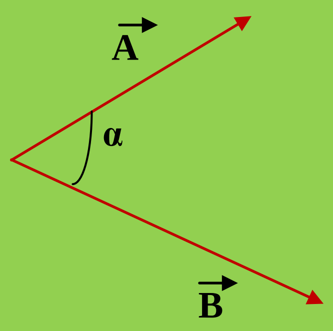
$$A \cdot B \cdot \cos\alpha = AxBx + AyBy + AzBz$$

$$3{,}74 \cdot 7 \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2$$

$$26{,}18 \cos\alpha = 18 - 6 - 2 \;;\; 26{,}18 \cos\alpha = 10 \;;\; \cos\alpha = 10 / 26{,}18$$

$$\cos\alpha = 0{,}3819 \rightarrow \alpha = 67{,}54^o$$

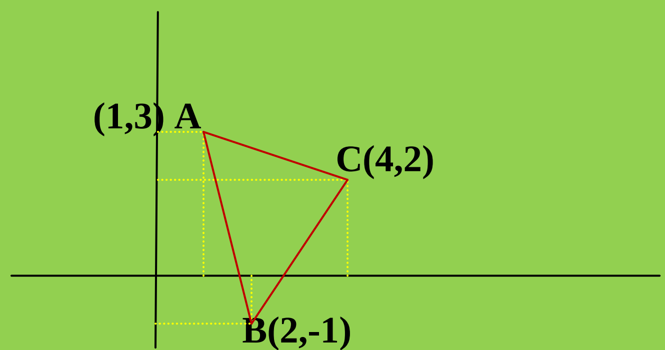
b) $\vec{A} = 3\,i + 2\,j - k$ y $\vec{B} = 6\,i - 3\,j + 2\,k$



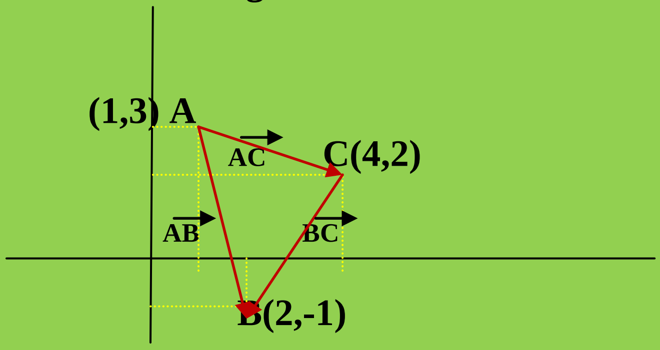
Ejercicio resuelto Nº 36 (Fuente Enunciado: Dpto de F/Q del I.E.S. Agular y Cano. Resolución: A. Zaragoza)

Calcula el perímetro, uno de sus ángulo y el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,3); B(2,-1) y C(4,2)

Resolución



Para conocer el perímetro transformaremos los lados del triángulo en vectores. Los *módulos de dichos vectores serán la longitud del lado correspondiente*. Como el ejercicio nos pide el ángulo que forman dos vectores tendremos presente que nosotros sabemos conocer ángulos entre vectores que tienen un origen común Vectores a determinar:



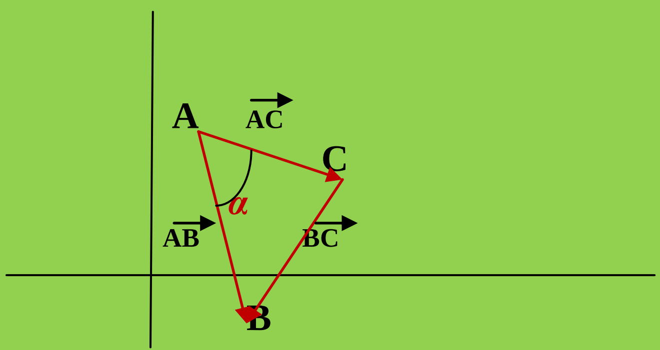
$\vec{AC} = [\,(4 - 1)\,,\,(2 - 3)\,] \rightarrow \vec{AC}\,(3, -1) \rightarrow \vec{AC} = 3\,i - j$
$\vec{CB} = [\,(2 - 4)\,,\,(-1 - 2)\,] \rightarrow \vec{CB}\,(-2, -3) \rightarrow \vec{CB} = -2\,i - 3\,j$
$\vec{AB} = [\,(2 - 1)\,,\,(-1 - 3)] \rightarrow \vec{AB}\,(1, -4) \rightarrow \vec{AB} = i - 4\,j$

$AC = [\,3^2 + (-1)^2]^{1/2} = 10^{1/2} = 3{,}16$
$CB = [\,(-2)^2 + (-3)^2]^{1/2} = 13^{1/2} = 3{,}6$
$AB = [\,(-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 17^{1/2} = 4{,}12$

Perímetro:

Perímetro $= \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AB} = 3{,}16 + 3{,}6 + 4{,}12 =$ *10,88 udl*

Uno de sus ángulos:



Recordemos:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB_xAC_x + AB_yAC_y + AB_zAC_z$

AB . AC . cos α = ABxACx + AByACy + ABzACz

4,12 . 3,16 . cos α = 1 . 3 + (-4) . (-1)

13,02 . cos α = 7 ; cos α = 7 / 13,02 = 0,537

α = 57,52º

Área del triángulo:

Área del triángulo = ½ | AB x AC |

Área del triángulo = ½ . AB . AC . sen α

AB = 4,12
AC = 3,16
sen 57,52º = 0,84

***Área del triángulo* = ½ . 4,12 . 3,16 . 0,84 = *5,46* uds**

Ejercicio resuelto Nº 37 (Fuente Enunciado: Raúl González Medina. Resolución: A. Zaragoza)

Comprobar que los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k; $\vec{B}$ = i + 3 j – 5 k y $\vec{C}$ = 2 i – j + 4 k forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Para comprobarlo tendremos que determinar que uno de los ángulos del triángulo es de 90º.

Aplicando las ecuaciones del producto escalar podremos resolver el ejercicio.

Datos necesarios:

A = [$3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2}$ = *3,74*
B = [$1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 35^{1/2}$ = *5,91*
C = [$2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 21^{1/2}$ = *4,58*

Veamos el ángulo que forma $\vec{A}$ con $\vec{B}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz \end{array}\right\}$$

A . B . cos α = AxBx + AyBy + AzBz

3,74 . 5,91 . cos α = 3 . 1 + 2 . 3 + (-1) . (-5)

22,1 cos α = 14 ; cos α = 14 / 22,1 = 0,63

α = 50,95º

Ángulo entre A y C:

C = 4,58

A . C = AxCx + AyCy + AzBz

3,74 . 4,58 . cos α = 3 .2 + 2 . (-1) + (-1) . 4

17,12 cos α = 6 – 2 – 4 ; 17,12 cos α = 0

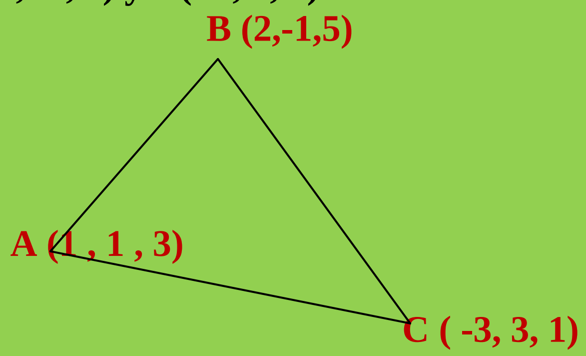
cos α = 0 / 17,12 = 0 → *α = 90º*

Se ha demostrado la existencia del ángulo de 90º por lo que el ejercicio está terminado.

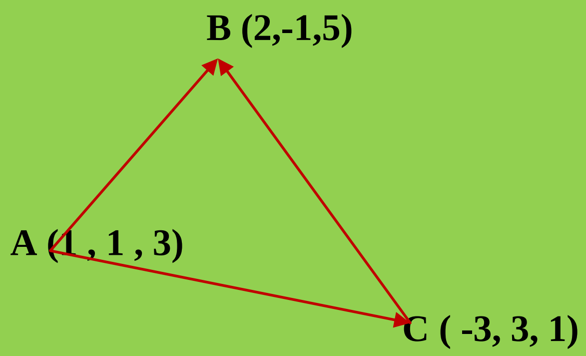
Ejercicio resuelto Nº 38
Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).

Resolución

A(1, 1, 5) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).



Si pasamos al diagrana de vectores:



Área del triángulo $= \frac{1}{2}\,|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,|$

$\vec{AB} = [\,(2-1), [(-1)-1], (5-3)\,]$; $\vec{AB} = i - 2\,j + 2\,k$

$\vec{AC} = [\,(-3-1), (3-1), (1-3)\,]$; $\vec{AC} = -4\,i + 2\,j - 2\,k$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4\,i + 2\,k - 8\,j - (\,[(-2).(-4)\,k] + 4\,i - 2\,j) =$$

$$= 4\,i + 2\,k - 8\,j - 8\,k - 4\,i + 2\,j =$$

$$= -6\,j - 6\,k$$

Área del triángulo $= \frac{1}{2}\,|\,AB \times AC\,|$

$|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,| = [(-6)^2 + (-6)^2]^{1/2} = 72^{1/2} = 8{,}84$

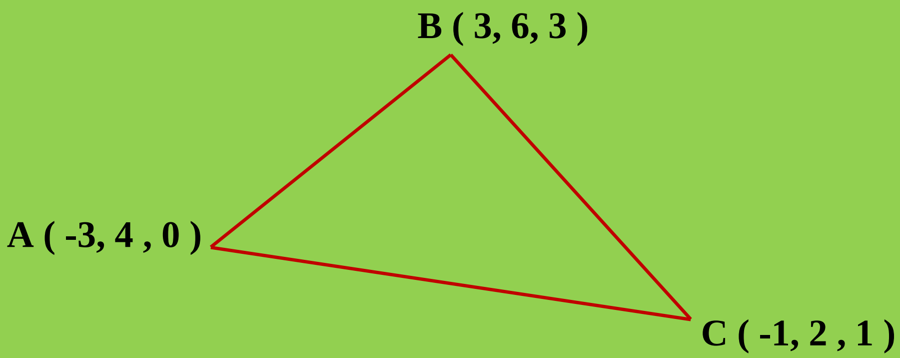
Área $= \frac{1}{2} \cdot 8{,}84 =$ ***4,42 u².*** $\left(4{,}42\ u^2\right)$

Ejercicio resuelto Nº 39

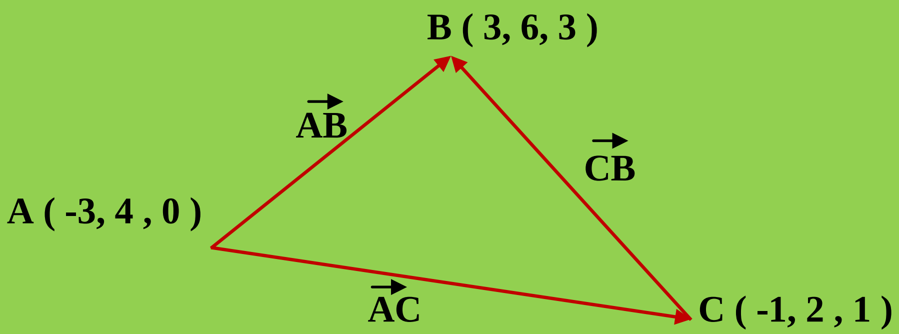
Sean A (- 3, 4, 0) ; B (3, 6, 3) y C (- 1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

a) **El coseno de cada uno de los ángulos del triángulo.**
b) **Área del triángulo.**

Resolución



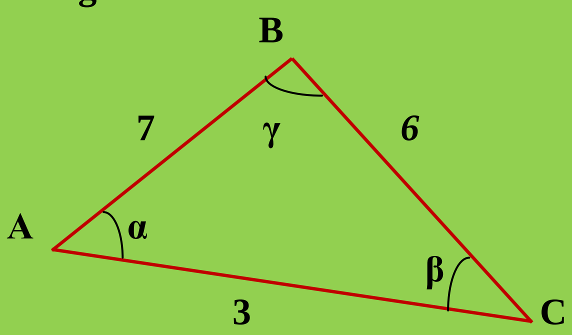
Calcularemos los vectores correspondientes a cada uno de los lados del triángulo, sus módulos y aplicando el teorema del coseno, los cosenos de los tres ángulos del triángulo:



$\overrightarrow{AB}$ **[(3 – (- 3)) , (6 – 4) , (3 – 0)] →** $\overrightarrow{AB}$ **(6 , 2 , 3)**
$\overrightarrow{AC}$ **[(- 1 – (- 3)) , (2 – 4) , (1 – 0)] →** $\overrightarrow{AC}$ **(2 , -2, 1)**
$\overrightarrow{CB}$ **[(3 – (- 1)) , (6 – 2) , (3 – 1)] →** $\overrightarrow{CB}$ **(4 , 4, 2)**

$|\overrightarrow{AB}| = (6^2 + 2^2 + 3^2)^{1/2} = 49^{1/2} = 7$
$|\overrightarrow{AC}| = [(2^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$
$|\overrightarrow{CB}| = (4^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2} = 36^{1/2} = 6$

Si volvemos al triángulo inicial:



Los valores de los lados no corresponden con la longitud pintada. Pero los consideramos como válidos y podemos seguir trabajando.

Teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $6^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\alpha$

$36 = 9 + 49 - 42 \cdot \cos\alpha$; $-19 = -42 \cos\alpha$; $\cos\alpha = -19/-42 = 0{,}45$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\gamma$; $3^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\gamma$

$9 - 36 - 49 = -84 \cos\gamma$; $-76 = -84 \cos\gamma$; $\cos\gamma = -76 / -84$

$\cos\gamma = 0{,}9 \rightarrow \gamma = 25{,}84^o$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\beta$; $7^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos\beta$

$49 - 36 - 9 = -36 \cos\beta$; $4 = -36 \cos\beta$; $\cos\beta = 4 / -36 = -0{,}11$

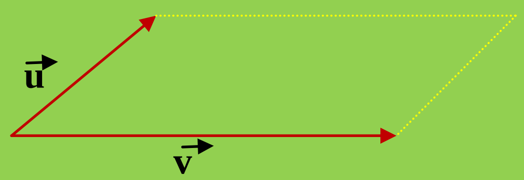
$\beta = 96{,}37^o$

Área del triángulo = $|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 7 \cdot 0{,}45 = 9{,}45\ u^2$

Ejercicio resuelto Nº 40

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v}\ (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores u y v.

Resolución



Área del paralelogramo = $|\vec{u} \times \vec{v}|$

u = (3, 1, -1) y v (2, 3, 4)

$$u \times v = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} = 4\,i + 9\,k - 2\,j - (2\,k - 3\,i + 12\,j = \\ = 4\,i + 9\,k - 2\,j - 2\,k + 3i - 12\,j = \\ = 7\,i - 14\,j + 7\,k \end{array}$$

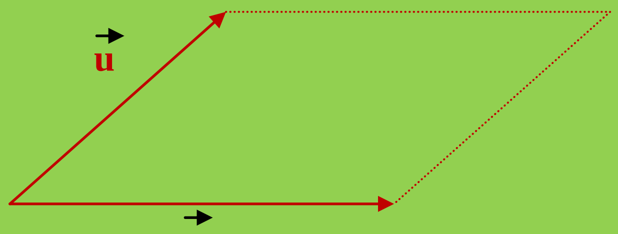
$|\vec{u} \times \vec{v}| = [\,7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 294^{1/2} = 17{,}14$

Área del paralelogramo = ***17,14 u^2***

Problema resuelto Nº 41

Calcula el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}\,(2, 3, 4)$ y $\vec{v}\,(3, 1, 2)$

Resolución



Área del paralelogramo = $|\,u \times v\,|$

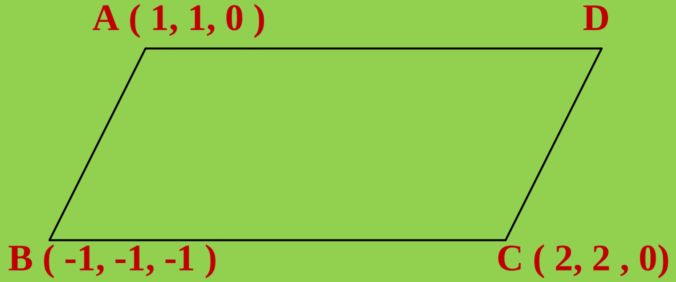
$$\begin{array}{c} \\ u \times v = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \\ = 6\,i + 2\,k + 12\,j - (\,9\,k + 4\,j + 4\,i) = \\ = 2\,i + 8\,j - 7k \end{array}$$

$|\,u \times v\,| = [\,2^2 + 8^2 + (-7)^2]^{1/2} = 117^{1/2} = 10{,}81\ u^2$

Área = ***10,81 u^2***

Ejercicio resuelto Nº 42

Considerar la siguiente figura:

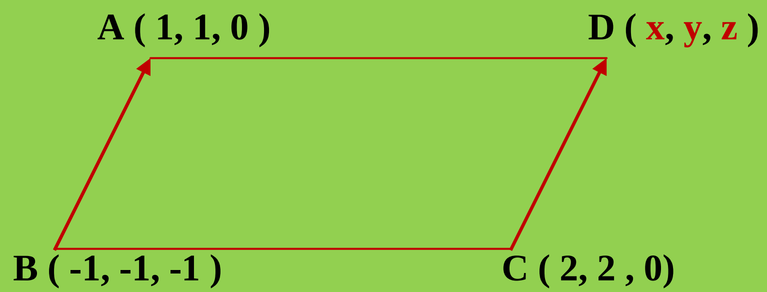


Se pide:

a) **Coordenadas de D para qué ABCD sea un paralelogramo**
b) **Área del paralelogramo.**

Resolución

a) **Para que ABCD sea un paralelogramo es necesario que los lados BA y CD sean paralelos y tengan la misma longitud. O bien que los vectores $\vec{BA}$ y $\vec{CD}$ sean equipolentes, es decir, tengan las mismas componentes y por lo tanto el mismo módulo. El dibujo inicial lo podemos transformar en:**



Componentes vector $\vec{BA}$:

$\vec{BA}$ **[(1 – (- 1)) , (1 – (-1)) , (0 – (-1))]**

$\vec{BA}$ **(2 , 2 , 1)**

Componentes del vector $\vec{CD}$:

$\vec{CD}$ **[(x – 2) , (y – 2) , (z – 0)]**

Como $|\vec{BA}| = |\vec{CD}|$ se cumplirá:

$x - 2 = 2$; $x = 4$

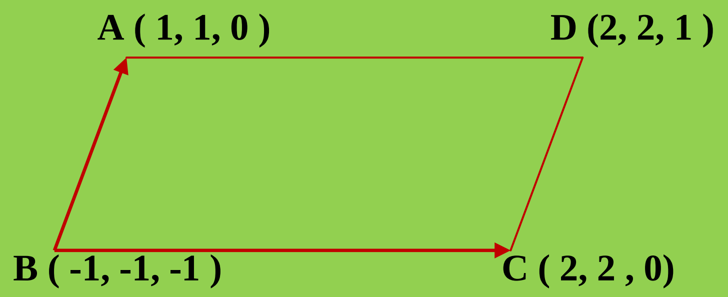
$y - 2 = 2$; $y = 4$

$z - 0 = 1$; $z = 1$

Las coordenadas del punto D son (4, 4, 1)

b) El Área del paralelogramo.

Trabajaremos con el dibujo inicial:



$\vec{BA}$ **(2, 2, 1)**

$\vec{BC}$ **(3, 0, 1)**

Área del paralelogramo = | BA x BC |

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,i + 3\,j - (6\,k + 2\,j) = 2\,i + j - 6\,k$$

$$|\vec{BA} \times \vec{BC}| = [\,2^2 + 1^2 + (-6)^2\,]^{1/2} = 41^{1/2} = 6{,}4$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

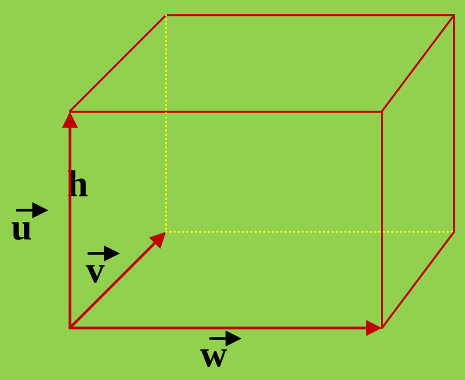
Área del paralelogramos = *6,4* Ejercicio resuelto

Ejercicio resuelto nº 43

Dados los vectores $\vec{u}$ (1,3,5) ; $\vec{v}$ (2, -1,4) y $\vec{w}$ (2, 4 , 3), determinar el volumen del paralelepípedo que constituyen.

Resolución

Dibujamos la figura y colocamos los vectores:



Volumen del paralelepípedo = Área de la base x la atura =

$$= |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Área de la base = $|\vec{v} \times \vec{w}|$

Altura = h = $|\vec{u}|$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 24 + 40 + 10 - 18 - 16 = 37\ u^3$$

Volumen del paralelepípedo = ***37 u^3***

Ejercicio resuelto Nº 44

El volumen de un ortoedro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. Sabiendo que los vectores que forman la base corresponden a $\vec{v}$ (2, -1, 4) y $\vec{w}$ (2, 4, 3) y las componentes de de la altura son $\vec{u}$ (1, 3, 5). ¿Cuál es el valor del volumen del ortoedro?.

Resolución:

$$\textit{Volumen del ortoedro} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 24 + 40 - (-10 + 18 + 16) = 61 - 24 = 37\ u^3$$

Ejercicio resuelto Nº 45

Tenemos tres vectores cuyas componentes son:

$$\vec{u}\,(2, -1, 1)\ ;\ \vec{v}\,(3, -2, 5)\ \text{y}\ \vec{w}\,(3, 5, 1)$$

Responde, tras comprobar, si el valor escalar de $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ es igual a $\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$ y a $\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$.

Resolución

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 15 + 15 - (-6 - 3 + 50) = -45$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15 - 4 - 15 - (50 - 6 - 3) = -45$$

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 15 - 4 - (-3 + 50 - 6) = -45$$

Ejercicio resuelto Nº 46

Dados los vectores:

$$\vec{u}\,(2, 1, 3)\ ;\ \vec{v}\,(1, 2, 3)\ \ y\ \ \vec{w}\,(-1, -1, 0)$$

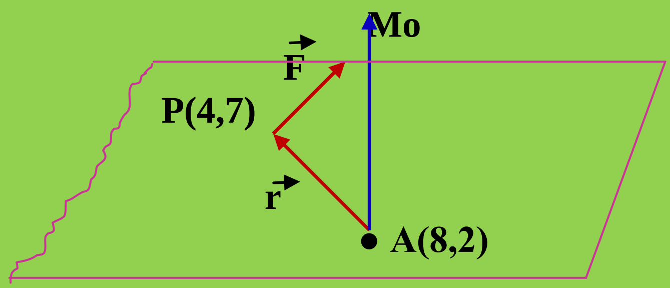
Hallar el *producto mixto* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

Resolución

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 3 - (-6 - 6) = -6 + 12 = 6\ u^3$$

Ejercicio resuelto N º 47 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. Aguilar y Cano. Resolución: A. Zaragoza)

El vector $\vec{F} = 2\,i + j$ tiene su punto de aplicación en el punto P(4,7). Determina el momento de F respecto del punto A(8,2).



Componentes del vector $\vec{r}$:

$$\vec{r}\,[(4-8), (7-2)] \rightarrow \vec{r}\,(-4, 5)$$

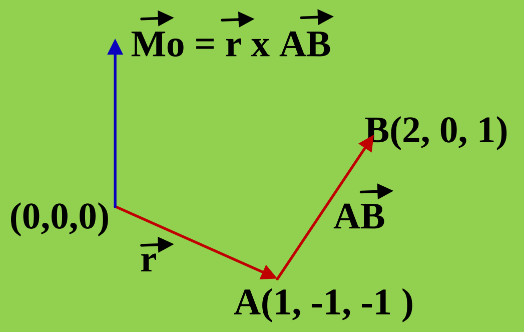
El momento de $\vec{F}$: $\vec{Mo} = \vec{r}\times\vec{F}$

$$\vec{Mo} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\,k - (10\,k) = -14\,k$$

Ejercicio resuelto Nº 48 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. Aguilar y Cano. Resolución: A. Zaragoza)

Calcula el momento del vector AB, definido por A (1, -1, -1) y B (2, 0 , 1), respecto al origen de coordenadas.

Resolución



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(1 – 0) , (-1 – 0) , (-1 – 0)] → $\vec{r}$ (1, -1, -1)

Componentes del vector $\vec{AB}$:

$\vec{AB}$ [(2 – 1) , (0 – (-1)) , (1 – (-1))] → $\vec{AB}$ (1, 1, 2)

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,i - j + k - (-k + 2\,j - i) = -i - 3\,j + 2\,k$$

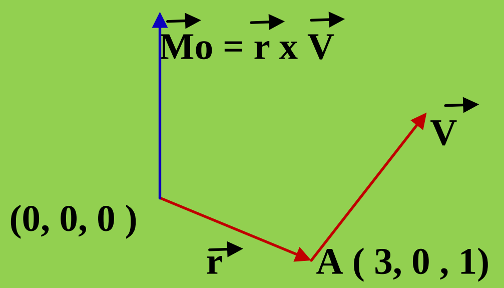
Ejercicio resuelto Nº 49 (Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) tiene su punto de aplicación en A (3, 0, 1), calcula:

a) **El momento de $\vec{V}$ respecto del origen de coordenadas.**
b) **El momento de $\vec{V}$ respecto del punto b (3, -2, -1)**

Resolución

a) **El punto A es el punto extremo del vector r**



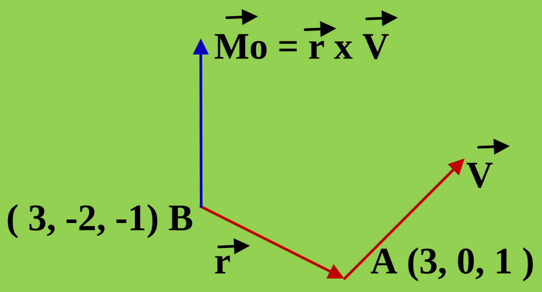
Componentes del vector r :

$\vec{r}\,[\,(3-0),(0-0),(1-0)\,] \rightarrow \vec{r}\,(3,0,1)$

El vector Mo con respecto al origen de coordenadas:

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2j + 3k - (i) = -i + 2j + 3k$$

b) **El momento respecto al punto B (3, -2 , -1)**



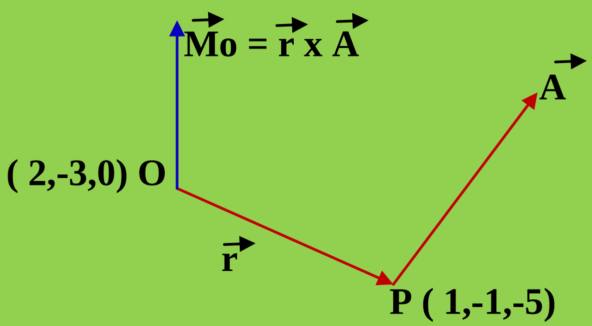
Componentes vector r:

$\vec{r}\,[\,(3-3),(0-(-2)),(1-(-1))\,] \rightarrow \vec{r}\,(0,2,2)$

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4j - (4k + 2i) = -2i + 4j - 4k$$

Ejercicio resuelto Nº 50 (Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado el vector $\vec{A} = j - 3k$ aplicado en el punto P (1, -1, -5), halla su momento respecto del punto O (2, -3, 0).



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(1 – 2) , ((-1) – (-3)) , ((-5) – 0)] → $\vec{r}$ (-1, 2, -5)

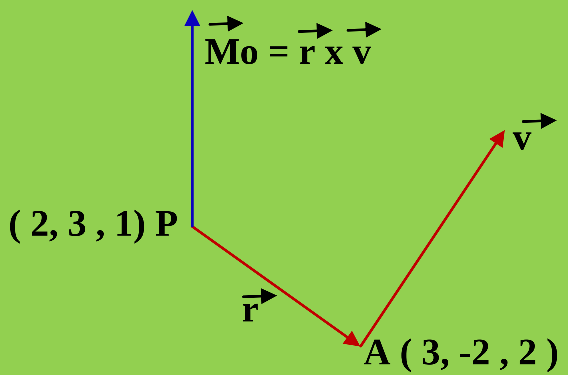
$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6\,i - k - (3\,j - 5\,i) = -\,i - 3\,j - k$$

Ejercicio resuelto Nº 51 (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. Aguilar y Cano. Resolución: A. Zaragoza)

Sabiendo que el vector $\vec{r}$ (3, -2 , 2) es el vector de posición del vector $\vec{v}$ (5 , -1 , 2), referido al punto (0, 0 , 0). Calcular el momento del vector $\vec{v}$ respecto al punto P (2, 3, 1).

Resolución

Si el vector r está referido al punto (0, 0, 0) y las componentes de $\vec{r}$ son (3, -2 , 2), esto implica que el punto extremo de $\vec{r}$ es A (3, -2 , 2) y por lo tanto el punto de aplicación del vector $\vec{v}$, luego:



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 – 2) , ((-2) – 3) , (2 – 1)] → $\vec{r}$ (1 , - 5 , 1)

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10\,i + 5\,j - k - (-25\,k - i + 2\,j) = -9\,i + 3\,j + 24\,k$$

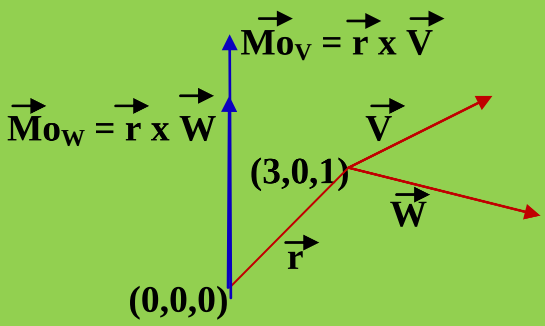
Ejercicio resuelto Nº 52

El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) y el vector $\vec{W}$ = i – j + 3 k tienen su punto de aplicación en el punto P (3, 0, 1), calcular:

a) **El momento resultante respecto al origen de coordenadas.**
b) **El momento resultante respecto al punto B (3, -2, -1).**

Resolución

a)



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 – 0) , (0 – 0) , (1 – 0)] → $\vec{r}$ (3, 0, 1)

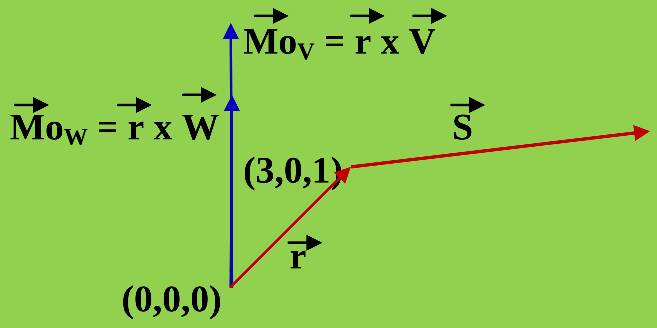
$$\vec{Mo}_V = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,i + 2\,j + 3k$$

$$\vec{Mo}_W = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = j - 3\,k - (\,9\,j - i\,) = i - 8\,j - 3\,k$$

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (\,-\,i + 2\,j + 3\,k\,) + (\,i - 8j - 3\,k\,) =$$

$$= -\,i + 2\,j + 3\,k + i - 8\,j - 3\,k = -\,6\,j$$

Según Varignon:



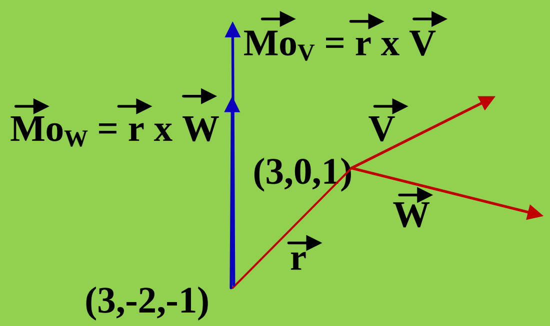
$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \quad (1)$$

$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2\,i + j) + (i - j + 3\,k) = 3\,i + 3\,k$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\,j - (9\,j) = -6\,j$$

b) **Respecto al punto B (3, -2, -1):**



Componentes del vector r:

$\vec{r}\,[(3 - 3) , (0 - (-2)) , (1 - (-1))] \rightarrow \vec{r}\,(0, 2, 2)$

$$\vec{Mo}_V = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,j - (4\,k + 2\,i) = -2\,i + 4\,j - 4\,k$$

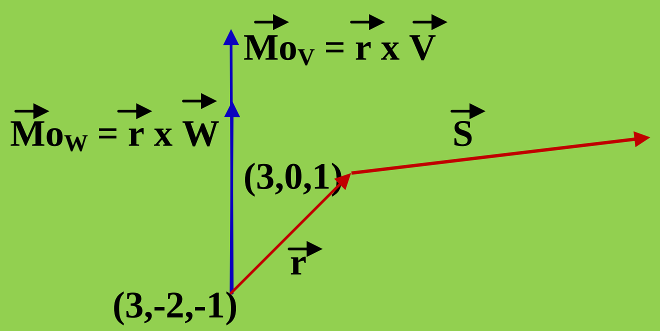
$$\vec{Mo}_W = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\,i + 2\,j - (2\,k - 2\,i) = 8\,i + 2\,j - 2\,k$$

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (-2\,i + 4\,j - 4\,k) + (8\,i + 2\,j - 2\,k) =$$

$$= -2\,i + 4\,j - 4\,k + 8\,i + 2\,j - 2\,k =$$

$$= 6\,i + 6\,j - 6\,k$$

Según Varignon:



$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \quad (1)$$

$\vec{r}\,(0, 2, 2)$

$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2\,i + j) + (i - j + 3\,k) = 3\,i + 3\,k$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\,i + 6\,j - (6\,k) = 6\,i + 6\,j - 6\,k$$

---------------------------------- O ----------------------------

Antonio Zaragoza López