TEMA Nº 1. VECTORES. CÁLCULO VECTORIAL

NOTA: Para acceder a los *videos y páginas Webs* propuestas *PISAR CONTROL* y *PINCHAR* en el video o página Web seleccionada.

Video Obligatorio: Iniciación a vectores y operaciones con vectores
http://www.youtube.com/watch?v=m0ykWZbFZJg

La temática vista en el video anterior intentaremos explicarla con el siguiente contenido:

1.- Estudio de las Magnitudes.

Magnitudes Físicas
http://newton.cnice.mec.es/materiales_didacticos/magnitudes/magnitudes.html

Magnitud
http://recursostic.educacion.es/newton/web/materiales_didacticos/medida/magnitudes.htm

Magnitud
http://www.quimicaweb.net/ciencia/paginas/magnitudes.html

Las *Magnitudes* son atributos con los que medimos determinadas *propiedades físicas*, por ejemplo una *temperatura*, una *longitud*, una *fuerza*, la *corriente eléctrica*, etc.

Estudiemos la siguiente experiencia:

La *policía de tráfico* que está en carreta recibe un mensaje del helicóptero de apoyo que dice: *Coche, de tales características, marcha a una velocidad de 120 Km/h en zona de velocidad limitada a 50 Km/h. con conducción temeraria*.

Se espera que la policía salga a la búsqueda del conductor que está infringiendo la ley. La pregunta es la siguiente *¿ con los datos aportados pueden hacer su trabajo?*

El comunicado aporta un *número y una unidad* (120 Km/h) pero no aporta los *datos vectoriales* necesarios que establezcan las características del movimiento del coche, tales como la dirección y el sentido del movimiento, por lo que la policía no podrá realizar su trabajo, es decir, no podrá salir a la búsqueda del conductor infractor.

2.- Magnitudes Escalares y Vectoriales.

Video: Animaciones sobre Magnitudes Escalares y vectoriales
http://www.youtube.com/watch?v=PqNlCvfZ9H0

Magnitudes Escalares y Vectoriales
http://quimicayalgomas.com.ar/fisica/magnitudes-vectoriales-y-escalares

Magnitudes Escalares y Vectoriales
http://www.fisicapractica.com/magnitudes.php

Magnitudes Escalares y Vectoriales
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Con esta experiencia realizada en el apartado nº 1 llegamos a la conclusión de que las magnitudes las podemos clasificar en:

a) ***Magnitudes escalares.-*** **Son aquellas que para su completa definición sólo necesitan de *un número*, seguido de una *unidad* en que la medimos. Este es el caso de la *temperatura*, *masa*, *longitud* para las cuales basta con indicar los grados, los gramos o los metros de una distancia.**
b) ***Magnitudes vectoriales.-*** **Son aquellas que para quedar definidas necesitan más que un simple número. Precisan, además, *una dirección* y *un sentido*. Si se trata de las fuerzas además necesitamos un *punto de aplicación*. Son ejemplos de estas magnitudes: *velocidad*, *aceleración* y *fuerza*, entre otras.**

La *fuerza* es la típica *magnitud vectorial*. Para conocer los efectos de una fuerza cuando se aplica a un objeto, es necesario saber *su punto de aplicación*, *su dirección*, *sentido* y el *módulo* o *intensidad* con la que dicha fuerza llega al cuerpo. Es decir, no es suficiente con decir que la fuerza vale o tiene un módulo de 42 N (Newton).

La diferencia entre magnitudes Escalares y Vectoriales radica en el hecho de que:

a) ***Magnitud Escalar*** **es aquella que queda perfectamente definida con sólo indicar su cantidad expresada en números y la unidad de medida.**
b) ***Magnitud Vectorial*** **es aquella que para quedar perfectamente definida, además de la cantidad expresada mediante un número y una unidad se necesita indicar la dirección y el sentido en que actúan.**

Las *magnitudes vectoriales* se representan mediante la *sigla de la magnitud con una flecha encima*. La fuerza es una magnitud vectorial, la representaremos de la forma $\vec{F}$.

3.- Estudio de los Vectores.

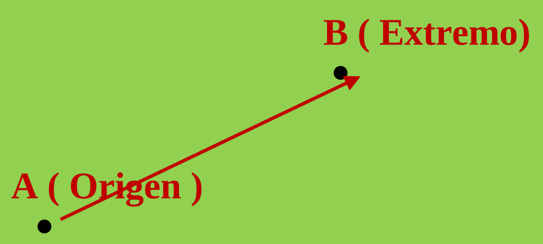
Hemos hablado de magnitudes vectoriales y ello nos obliga a conocer lo que es un *VECTOR*.

Vectores
http://www.vitutor.com/geo/vec/b_1.html

Definición de Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Vectores
http://www.vitutor.com/geo/vec/b_1.html

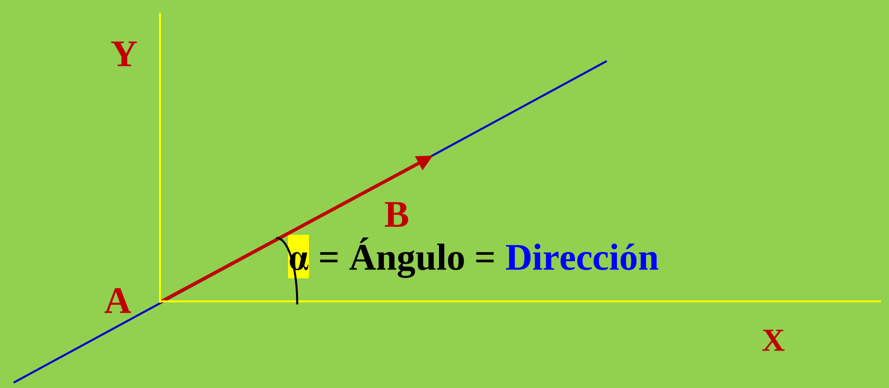
Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un *segmento orientado* que va del punto *A* (origen) al punto *B* (extremo).



Elementos de un vector:

1.- Dirección de un vector

La *dirección* del vector es la *dirección de la recta que contiene al vector* o de cualquier recta paralela a ella. Concretamente la dirección viene determinada por el *ángulo* que forma la *recta* que contiene el vector *con el eje OX*.

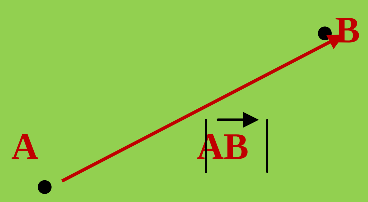


2.- Sentido de un vector

El *sentido* del vector $\overrightarrow{AB}$ es el que va desde *el origen A al extremo B*. Se determina mediante la *punta de flecha*.

3.- Módulo de un vector

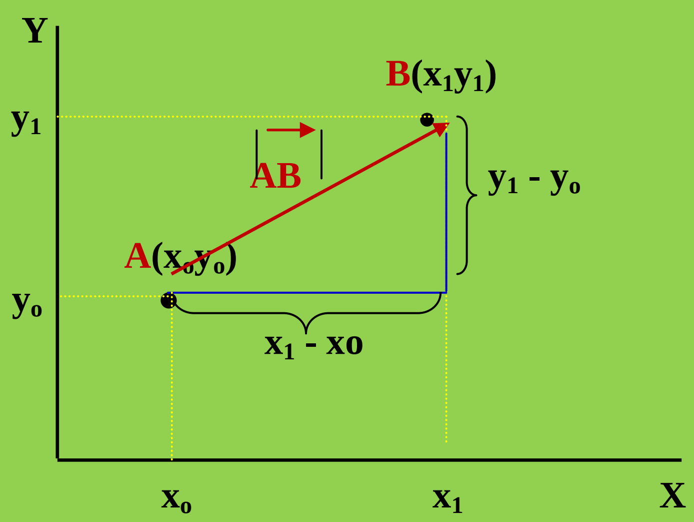
El *módulo* del vector $\overrightarrow{AB}$ es la *longitud del segmento* AB . Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.



El *módulo* de un vector es un número siempre *positivo* o *cero*.

Calculemos el módulo de un vector:

Para ello llevaremos el vector $\overrightarrow{AB}$ a unos ejes de coordenadas cartesianas en el plano.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_o)^2$$

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = [(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - yo)^2]^{1/2}}$$

Ejercicio resuelto

Calcular el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ sabiendo que A es el punto de coordenadas A(2,1) y B el punto de coordenadas B(-3,2). ¿Tendrá el mismo módulo AB el vector $\overrightarrow{BA}$?.

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} \quad xo,yo \\ A(2,1) \\ \quad x_1,y_1 \\ B(-3,2) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,[(x_1 - x_o),(y_1 - y_o)] \;;\; \overrightarrow{AB}\,[(-3-2),(2-1)] \\ \overrightarrow{AB}\,(-5,1) \end{array}$$

$\overrightarrow{AB}$ (-5 , 1) → Expresión del vector $\overrightarrow{AB}$ en función de sus componentes cartesianas

$$|\overrightarrow{AB}| = [(-5)^2 + 1^2]^{1/2} \;;\; |\overrightarrow{AB}| = (25+1)^{1/2} \;;\; |\overrightarrow{AB}| = 5.1 \text{ u}$$

u = unidades de la magnitud vectorial

Vector $\overrightarrow{BA}$:

$$\left.\begin{array}{l} \quad xo,yo \\ B(-3,2) \\ \quad x_1,y_1 \\ A(2,1) \end{array}\right\} \quad \overrightarrow{BA}\,[(2-(-3)),(1-2)] \;;\; \overrightarrow{BA} = (5,-1)$$

$$|\overrightarrow{BA}| = [5^2 + (-1)^2]^{1/2} \;;\; |\overrightarrow{BA}| = (25+1)^{1/2} \;;\; |\overrightarrow{BA}| = (26)^{1/2}$$

$$|\overrightarrow{BA}| = 5,1 \text{ u}$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen el mismo módulo. Como veremos más adelante se trata de *vectores opuestos*, es decir, aquellos que *tienen la misma dirección pero el sentido contrario*.

3.1.- Clasificación de vectores.

Clasificación de Vectores
https://sites.google.com/site/vectoresfisica/clasificacion-de-vectores

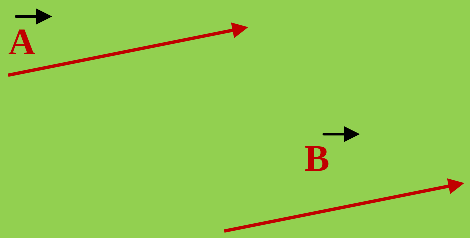
Clasificación de vectores
http://estrategias-para-aprender.globered.com/categoria.asp?idcat=36

Clasificación de vectores (BUENO)
http://laplace.us.es/wiki/index.php/2.8._Ejemplo_de_clasificaci%C3%B3n_de_vectores

Podemos establecer la siguiente clasificación de vectores:

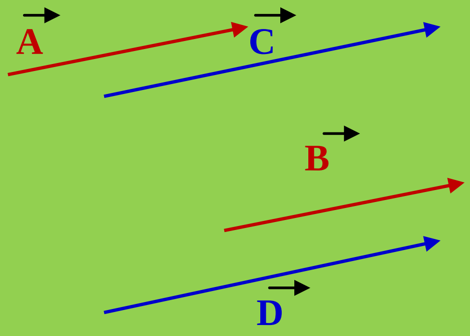
1.- Vectores equipolentes

Dos vectores son *equipolentes* cuando tienen *igual módulo*, *dirección* y sentido lo que implica que sean *paralelos*.



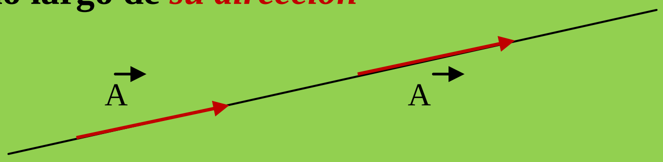
2.- Vectores libres

El conjunto de todos los vectores equipolentes entre sí se llama vector libre. Es decir los *vectores libres tienen el mismo módulo, dirección y sentido y se pueden trasladar paralelamente a sí mismos*.



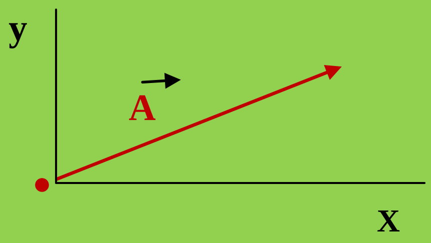
3.- Vectores Deslizantes

Son aquellos que se *pueden trasladar sobre la recta en que se apoyan*, es decir, a lo largo de *su dirección*



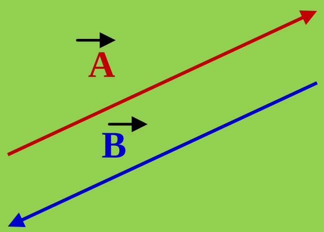
4.- Vectores fijos

Son aquellos cuyo *punto de aplicación*, *dirección* y *sentido* son *fijos e invariables.*



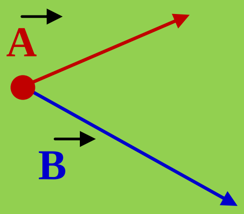
5.- Vectores opuestos

Los vectores opuestos tienen el *mismo módulo*, *dirección*, y *distinto sentido*.



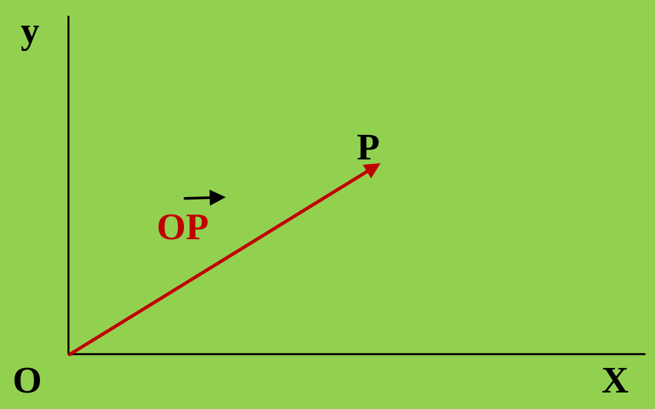
6.- Vectores concurrentes

Los vectores concurrentes tienen el mismo *origen*.



7.- Vector Posición

El vector que une el *origen de coordenadas O* con un punto *P* se llama *vector posición del punto P.*



3.2.- Componentes cartesianas de un vector (R2 y R3)

Componentes de un Vector
http://www.vitutor.com/geo/vec/b_1.html

Componentes de un vector
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Componentes de un Vector
http://www.educaplus.org/movi/1_3componentes.html

Componentes cartesianas de un vector en 2D y 3D
http://recursostic.educacion.es/eda/web/eda2008/profesores_newton/practicas_newton/p3/Eda2008%20Newton/conchi_

Componentes cartesianas de un vector
http://laplace.us.es/wiki/index.php/Componentes_cartesianas_de_un_vector_(G.I.A.)

Tenemos el vector $\overrightarrow{AB}$, tiene como origen es el punto A y extremos el punto B. El punto A tienen de coordenadas A(3,2) y el punto B(-1,-3). Determinar las coordenadas o componentes cartesianas del vector $\overrightarrow{AB}$.

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ las podremos obtener restando a las coordenadas del *Punto extremo*, B, las coordenadas del origen, A.

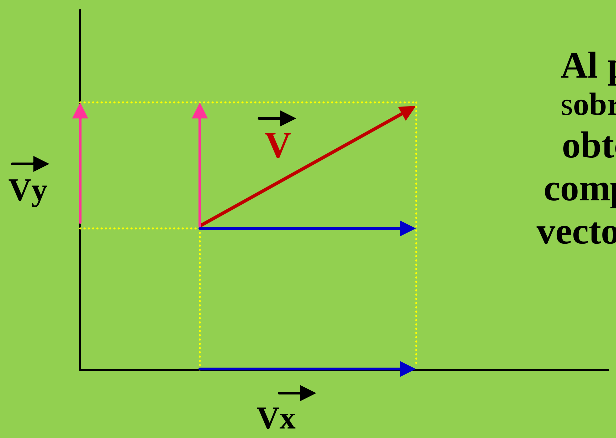
(x_1,y_1)
B(-1,-3)
(x_o,y_o) $\quad \vec{AB} = [\,(x_1 - x_o)\,,\,(y_1 - y_o)\,] \leftrightarrow \vec{AB}\,[\,(x_1 - x_o)\,,\,(y_1 - y_o)\,]$
A(3,2) **Observar que podemos utilizar el signo *“igual”* propio del mundo de las *Matemáticas*, o no utilizarlo, más en el mundo de la *Física*.**

Para nuestro ejemplo en concreto:

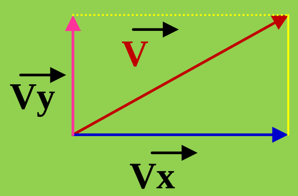
$\vec{AB}\,[\,(-1 - 3)\,,\,(-3\; - 2)\,]\;;\;\; \vec{AB}\,(-4,-5)$

Veremos otras formas de obtener las Componentes de un vector.

Trabajaremos primero en el plano:



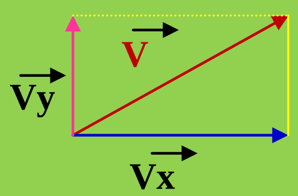
Al proyectar el vector V sobre los ejes de coordenadas obtenemos las componentes cartesianas del vector V



Utilizando la equipolencia entre vectores hemos podido descomponer el V en sus componentes $\vec{V}x$, $\vec{V}y$

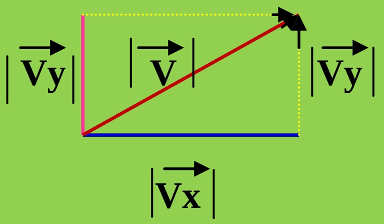
Podemos entonces establecer vectorialmente que:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y} \quad (1) \qquad \vec{V}\,(\,\vec{V}x\,,\,\vec{V}y\,)$$



Como vimos en el ejercicio anteriormente realizado podemos construir un triángulo rectángulo en donde:

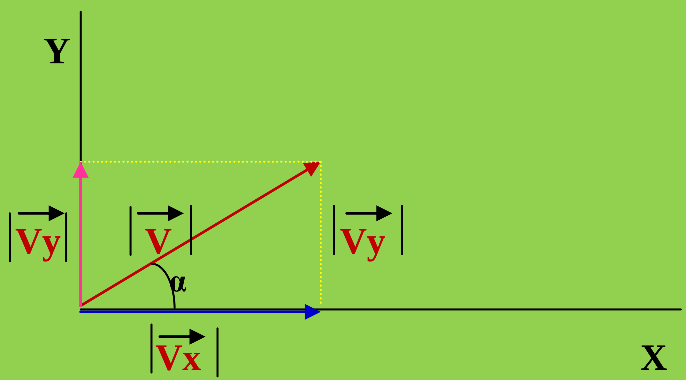
Por Pitagoras:



$$\boxed{|\vec{V}|^2 = |\vec{V}x|^2 + |\vec{V}y|^2}$$

En el mismo ejercico se vió como se calculaban los módulos de las componentes $\vec{V}x$ y $\vec{V}y$ del vector $\vec{V}$.

Las Componentes $\vec{V}x$ y $\vec{V}y$ también se pueden conocer realizando la proyección de $\vec{V}$ sobre cada uno de los ejes de coordenadas.



Aplicando trigonometría:

$$\text{sen}\,\alpha = |\vec{V}y| / |\vec{V}| \quad ; \quad \boxed{|\vec{V}y| = |\vec{V}| \,.\, \text{sen}\,\alpha}$$

De la misma manera podemos llegar a la conclusión:

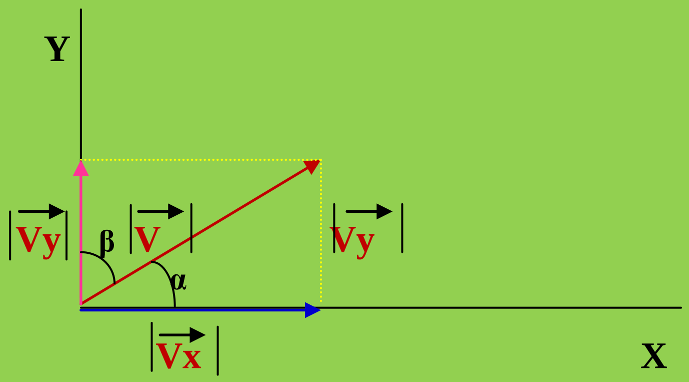
$$\cos\alpha = |\vec{V}x| / |\vec{V}| \quad ; \quad \boxed{|\vec{V}x| = |\vec{V}| \,.\, \cos\alpha}$$

Ya que estamos metidos con ángulos es importante conocer los llamados *COSENOS DIRECTORES*. Veamos la razón.

La *dirección* del vector es la *dirección de la recta que contiene al vector* o de cualquier recta paralela a ella.

Me da la sensación de que sabemos pintarla pero no sabemos realmente que es y además es muy normal confundir dirección y sentido de un vector.

Volvamos al grafico:



Hemos introducido otro ángulo, β, el que forma la componente $\overrightarrow{Vy}$ con el vector $\overrightarrow{V}$.

Geométricamente:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= |\overrightarrow{Vx}| \;/\; |\overrightarrow{V}| \\ \cos\beta &= |\overrightarrow{Vy}| \;/\; |\overrightarrow{V}| \end{aligned}\right\}$$

cos α y cos β se conocen como *COSENOS DIRECTORES.*

Conociendo los *cosenos directores* podremos determinar los ángulos que forma el vector con los ejes de coordenadas y como consecuencia la *dirección del vector*.

Como conclusión: la *Dirección* del vector viene dada por los *cosenos directores* y como conclusión del ángulo que forma la recta que contiene al vector con los ejes de coordenadas.

Matemáticamente se cumple:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \quad (1)$$

La demostración es fácil de entender siempre y cuando recordemos que:

cos α = | Vx | / | V |
cos β = | Vy | / | V |

Llevadas estas ecuaciones a la ecuación (1) anterior, nos quedaría:

$$[\,|V_x|/|V|\,]^2 + [\,|V_y|/|V|\,]^2 = 1$$

$$|V_x|^2/|V|^2 + |V_y|^2/|V|^2 = 1$$

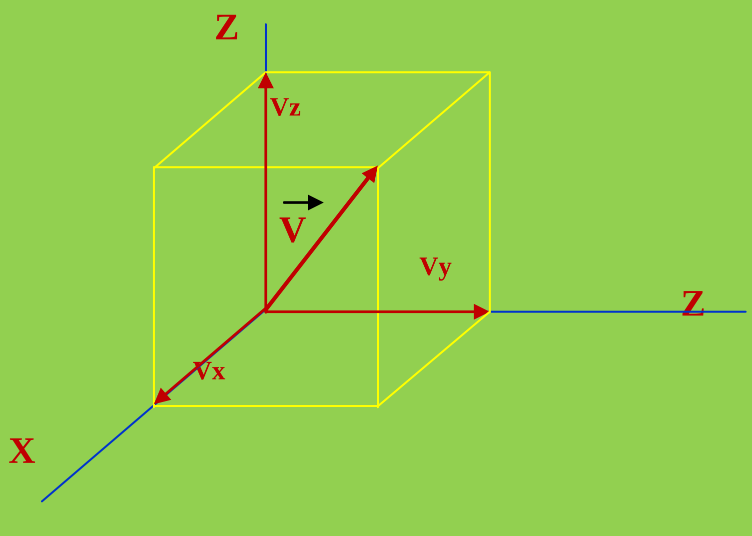
$$|V_x|^2 + |V_y|^2/|V|^2 = 1$$

Si recordemos que $|V|^2 = |V_x|^2 + |V_y|^2$

Nos quedaría: $|V|^2/|V|^2 = 1$

que es lo queríamos demostrar.

Al trabajar en el espacio (3D) todo vector tiene tres componentes. Vamos a dibujar un poco:

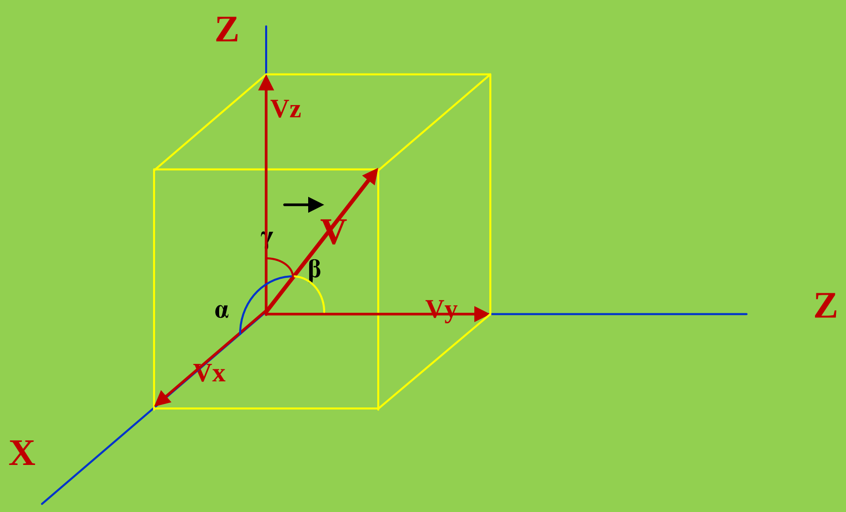


Vectorialmente:

$$\vec{V}\,(\,\vec{V_x}\,,\,\vec{V_y}\,,\,\vec{V_z}\,)$$

$$| V |^2 = | Vx |^2 + | Vy |^2 + | Vz |^2$$

Si queremos conocer los vectores directores:



Geométricamente:

$\cos \alpha = | Vx | / | V |$
$\cos \beta = | Vy | / | V |$
$\cos \gamma = | Vz | / | V |$

Cumpliéndose:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ejercicio resuelto
Hallar los cosenos directores del vector $\vec{u}$ (2,2,1).

Resolución

$\cos \alpha = ux / u$

$\cos \beta = uy / u$

$\cos \delta = uz / u$

$u = (2^2 + 2^2 + 1^2)^{1/2}$; $u = 3$

cos α = 2/3 ; *cos β = 2/3* ; *cos δ = 1/3*

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ (3,1,-1) y $\vec{v}$ (2,3,4), hallar:

a) **Módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **Vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{u}$.**
c) **Cosenos directores de $\vec{v}$,**
d) **Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector $\vec{v}$ es igual a la unidad.**

a) $u = (u^2x + u^2y + u^2z)^{1/2}$; $u = (3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2}$; $u = (11)^{1/2}$

$v = (v^2x + v^2y + v^2z)^{1/2}$; $v = (2^2 + 3^2 + 4^2)^{1/2}$; $v = (29)^{1/2}$

b) **u = u . a ; a = vector unitario del vector u**

a = u / u ; a (ax,ay,az)

$ax = 3/(11)^{1/2}$; $ay = 1/(11)^{1/2}$; $az = -1/(11)^{1/2}$

$\boxed{a = 3/(11)^{1/2}\ i + 1/(11)^{1/2}\ j - 1/(11)^{1/2}\ k}$

c) $\cos \alpha = v_x / v = 2/(29)^{1/2}$

$\cos \beta = v_y / v = 3/(29)^{1/2}$

$\cos \delta = v_z / v = 4/(29)^{1/2}$

d) $[2/(29)^{1/2}]^2 + [3/(29)^{1/2}]^2 + [4/(29)^{1/2}]^2 =$

$= 4/29 + 9/29 + 16/29 = (4 + 9 + 16) / 29 = 29/29 = 1$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u} = 3\ \vec{i} - 2\ \vec{j} + 3\ \vec{k}$; $\vec{v} = 2\ \vec{i} - 6\ \vec{j} + \vec{K}$ y $\vec{z} = 8\ \vec{i} + \vec{j} - 3\ \vec{k}$, hallar sus módulos y sus cosenos directores.

Resolución

$u = [3^2 + (-2)^2 + 3^2]$; $u = (22)^{1/2}$; $u = 4,69$

$v = [2^2 + (-6)^2 + 1^2]$; $v = (41)^{1/2}$; $v = 6,4$

$z = [\,8^2 + 1^2 + (-3)^2]^{1/2}$; $z = (74)^{1/2}$; $z = 8,6$

Vector $\vec{u}$:

$\cos\alpha = u_x/u$; $\cos\alpha = 3/4,69$; $\cos\alpha = 0,63$

$\cos\beta = u_y/u$; $\cos\beta = (-2)/4,69$; $\cos\beta = -\,0,42$

$\cos\delta = u_z/u$; $\cos\beta = 3/4,69$; $\cos\delta = 0,63$

Vectores $\vec{v}$ y $\vec{z}$ igual que $\vec{u}$.

4.- Vector Unitario.

Vamos a introducirnos en un nuevo tipo de vector:

Vectores Unitarios
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Vectores Unitarios
http://www.vitutor.com/geo/vec/b_1.html

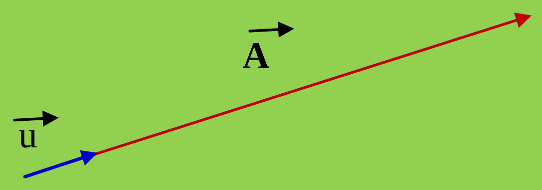
Vector Unitario
http://www.vitutor.com/geo/vec/a_5.html

Vector Unitario y Vector Nulo
http://www.xenciclopedia.com/post/Fisica/Vector-unitario-y-Vector-nulo.html

Vector Unitario

Los vectores unitarios tienen por módulo la *UNIDAD*.

***Normalizar* un vector $\vec{A}$ consiste en obtener otro vector unitario $\vec{u}$, de la misma dirección y se sentido que el vector dado:**



Para determinar el vector unitario nos basamos en: ***Todo vector es igual al modulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección y sentido del mismo*****.**

$$\vec{A} = |\vec{A}| \cdot \vec{u} \quad ; \qquad \boxed{\vec{u} = \vec{A} \,/\, |\vec{A}|}$$

$\vec{u}$ **= Vector Unitario**

Ejemplo resuelto

Dado el vector $\vec{V}(3,4)$ determinar el vector unitario de su misma dirección y sentido.

Resolución

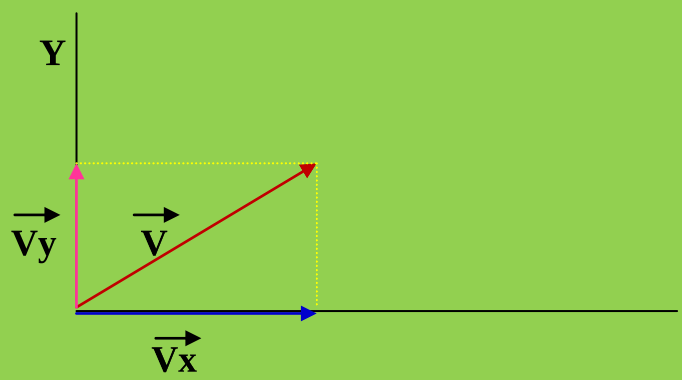
$$\vec{u} = \vec{V} \,/\, |\vec{V}| \qquad (2)$$

$$V = (3^2 + 4^2)^{1/2} \;;\; |\vec{V}| = (25)^{1/2} = 5$$

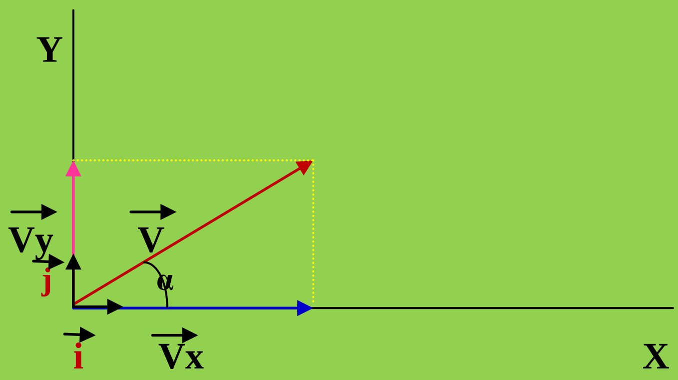
Si nos vamos a la ecuación (1):

$$\vec{u} = \vec{V} \,/\, |\vec{V}| \;;\; \vec{u} = (3,4)/5 = (\,3/5\,,\,4/5\,)$$

Con los vectores unitarios tenemos otra posibilidad de representar un vector. Volvamos a la gráfica:



y vamos a normalizar el vector $\vec{V}$:



$\vec{i}$ es el vector unitario de la componente x del vector $\vec{V}$.
$\vec{j}$ es el vector unitario de la componente y del vector $\vec{V}$.

Se estableció que:

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y}$$

y ahora sabemos que:

$$\vec{i} = \vec{V}x \,/\, |\vec{V}x| \quad ; \quad \boxed{\vec{V}x = |\vec{V}x| \,.\, \vec{i}}$$

$$\vec{j} = \vec{V}y \,/\, |\vec{V}y| \quad ; \quad \boxed{\vec{V}y = |\vec{V}y| \,.\, \vec{j}}$$

La expresión:

$$\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y$$

La podemos transformar en:

$$\boxed{\vec{V} = |\vec{V}x| \,.\, \vec{i} + |\vec{V}y| \,.\, \vec{j}}$$

Ejemplo

Dado el vector $\vec{V}$ de componentes (3,-5), normalizarlo.
Normalizar un vector consiste en ponerlo en función de sus vectores unitarios, es decir, manifestar las componentes del vector V en función de sus componentes según los ejes de coordenadas.

$\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} + (-5) \cdot \vec{j}$; $\boxed{\vec{V} = 3 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}}$

Ejercicio resuelto

Sabiendo que el punto A es A(-3,-2) y que el vector $\vec{AB}$ es $\vec{AB}$ (9,5) determinar las coordenadas del punto B.

Resolución

$\vec{AB} = [\,(x_B - x_A)\,,\,(y_B - y_A)\,]$

$(9,5) = [(x_B - (-3))\,,\,(y_B - (-2))]$

$$\left.\begin{aligned} 9 = x_B + 3 \;;\; x_B = 9 - 3 = 6 \;;\; x_B = 6 \\ 5 = y_B + 2 \;;\; y_B = 5 - 2 = 3 \;;\; y_B = 3 \end{aligned}\right\} \text{Punto } B(6,3)$$

Ejercicio resuelto

El vector $\vec{AB}$ viene determinado por las componentes (-11,8). Sabemos que el punto extremo es B(-7,5). Determinar el punto origen A

Resolución

$\vec{AB} = [\,(x_B - x_A)\,,\,(y_b - y_A)\,]$; $\vec{AB} = [\,(-7 - x_A)\,,\,(5 - y_A)\,]$

$-11 = -7 - x_A$; $x_A = 4$; $8 = 5 - y_A$; $y_A = -3 \rightarrow$ ***A(4,-3)***

Ejercicio resuelto

Calcula el valor de *"k"* sabiendo que el módulo del vector $\vec{V}(k,3)$ es 5.

Resolución

$|\vec{v}| = (k^2 + 3^2)^{1/2}$; $5 = (k^2 + 3^2)^{1/2}$; $25 = K^2 + 9$; $k^2 = 16$; $k = \pm 4$

Son válidos los dos valores de *"k"*.

Ejercicio resuelto

Normalizar los siguientes vectores: $\vec{u}\,(1, 2^{1/2})$; $\vec{v}\,(-4,3)$ y $\vec{w}\,(8,-8)$.

Resolución

Normalizar un vector consiste en hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido. Por tanto:

a) $\vec{u}\,(1, 2^{1/2})$; $\vec{a}\,(a_x , a_y) \rightarrow \vec{a}\,(a_x,a_y)$ **vector unitario de** $\vec{u}$

Se cumple:

$$\vec{u} = |\,\vec{u}\,| \cdot \vec{a} \;;\quad \vec{a} = \vec{u} \,/\, |\,\vec{u}\,|$$

$$a_x = u_x / |\,\vec{u}\,| \;;\; a_y = u_y / |\,\vec{u}\,|$$

$$|\,\vec{u}\,| = [\,1^2 + (2^{1/2})^2\,]^{1/2} \rightarrow |\,\vec{u}\,| = 3^{1/2}$$

$$a_x = 1 / 3^{1/2} \;;\; ay = 2^{1/2} / 3^{1/2} \;;\; a_y = (2/3)^{1/2}$$

$$\vec{a}\,(a_x,a_y) \rightarrow \vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} \rightarrow \vec{a} = 1/\,3^{1/2}\,\vec{i} + (2/3)^{1/2}\,\vec{j}$$

b) **Igual a a).**
c) **Igual a a).**

Ejercicio resuelto

Clasificar el triángulo determinado por los puntos: A(4,-3) , B(3,0) y C(0,1).

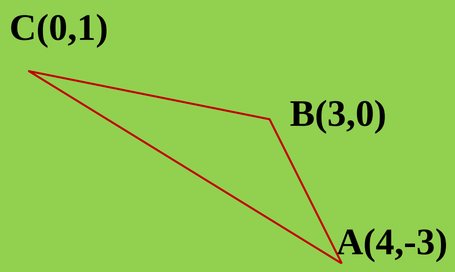
Resolución

Podremos clasificar el triángulo en función de las longitudes de sus lados. Hasta el momento no podemos clasificar el triángulo en función de los ángulos.

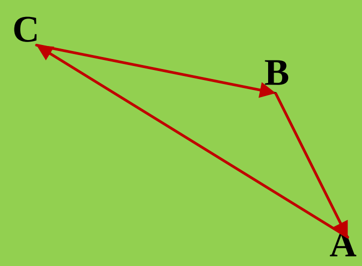
En función de las longitudes de los lados, los triángulos se pueden clasificar en:

a) **Equiláteros.- Los tres lados iguales.**
b) **Isósceles.- Dos lados iguales y uno distinto.**
c) **Escaleno.- Los tres lados diferentes.**

Dicho esto, que nuestro triángulo es:



Podemos transformar el triángulo en tres vectores:



$\overline{CB} = |\overrightarrow{CB}|$; $\overrightarrow{CB}$ [(3 – 0) , (0 – 1)] ; $\overrightarrow{CB}$ (3,-1)

$\overline{BA} = |\overrightarrow{BA}|$ $\overrightarrow{BA}$ [(4 – 3) , (-3 – 0)] ; $\overrightarrow{BA}$ (1,-3)

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}|$ AC [(0 – 4) , (1 – (-3))] ; $\overrightarrow{AC}$ (-4,4)

$|\overrightarrow{CB}| = [(3^2 + (-1)^2]^{1/2}$; $|\overrightarrow{CB}| = (10)^{1/2}$

$|\overrightarrow{BA}| = [(1^2 + (-3)^2]^{1/2}$; $|\overrightarrow{BA}| = (10)^{1/2}$

$|\overrightarrow{AC}| = [(-4)^2 + 4^2)]$; $|\overrightarrow{AC}| = (32)^{1/2}$

Conclusión: **Se trata de un tiángulo *Isósceles*.**

Ejercicio resuelto

Si $\overrightarrow{V}$ es un vector de componentes (3,4), hallar el vector unitario en su misma dirección y sentido.

Resolución

Recordemos que:

$\overrightarrow{u}$ = Vector Unitario $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{V} / |\overrightarrow{V}| \rightarrow \overrightarrow{u}\,(\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$

$\overrightarrow{V}\,(\overrightarrow{Vx},\overrightarrow{Vy})$

$$|\vec{V}| = \left[|\vec{Vx}|^2 + |\vec{Vy}|^2 \right]^{1/2} \quad ; \quad |\vec{V}| = [\,(3^2 + 4^2\,]^{1/2} = 5$$

$$|\vec{u}_x| = Vx \;/\; |\vec{V}| \;;\; |\vec{u}_x| = 3/5$$

$$|\vec{u}_y| = V_y \;/\; |\vec{V}| \;;\quad |\vec{u}_y| = 4/5$$

Luego el vector unitario del vector $\vec{V}$ es:

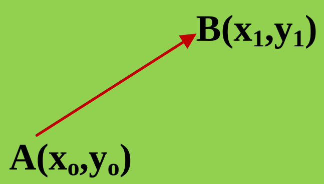
$$\vec{u}\,(3/5,4/5) \rightarrow \boxed{\vec{u} = 3/5\ \vec{i} + 4/5\ \vec{j}}$$

Ejercicio resuelto

Dado el vector $\vec{u}$ (2,-1), determinar dos vectores equipolentes a $\vec{u}$, $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$, sabiendo que A(1,-3) y D(2,0).

Resolución

Si nos basamos en la equipolencia de vectores tenemos que conocer que los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ tienen el mismo módulo. Esto nos permite establecer:



$\vec{AB}\,[\,(x_1 - 1),\ (y_1 - (-3))\,]$

$\vec{AB}\,[\,(x_1 - 1)\ \ (y_1 + 3)\,]$

Como:

$|\vec{u}| = |\vec{AB}|$; $\vec{u}$ y $\vec{AB}$ deben tener las mismas componentes:

$$(2,-1) = [\,(x_1 - 1),\ (y_1 + 3)\,]$$

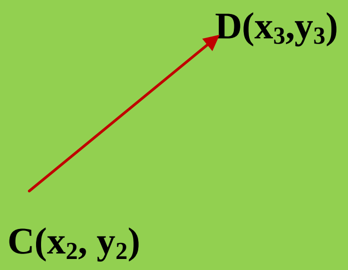
$$2 = x_1 - 1 \;;\; x_1 = 2 + 1 \;;\; x_1 = 3$$

$$-1 = y_1 + 3 \;;\; y_1 = -1 - 3 = -4 \;;\; y_1 = -4$$

Luego el punto B es *B(3,-4)*

Por tanto $\vec{AB}$ [(3 – 1),(-4 – (-3))] ; $\vec{AB}$ *(2, -1)*

$$\vec{AB} = 2\ \vec{i} - \vec{j}$$

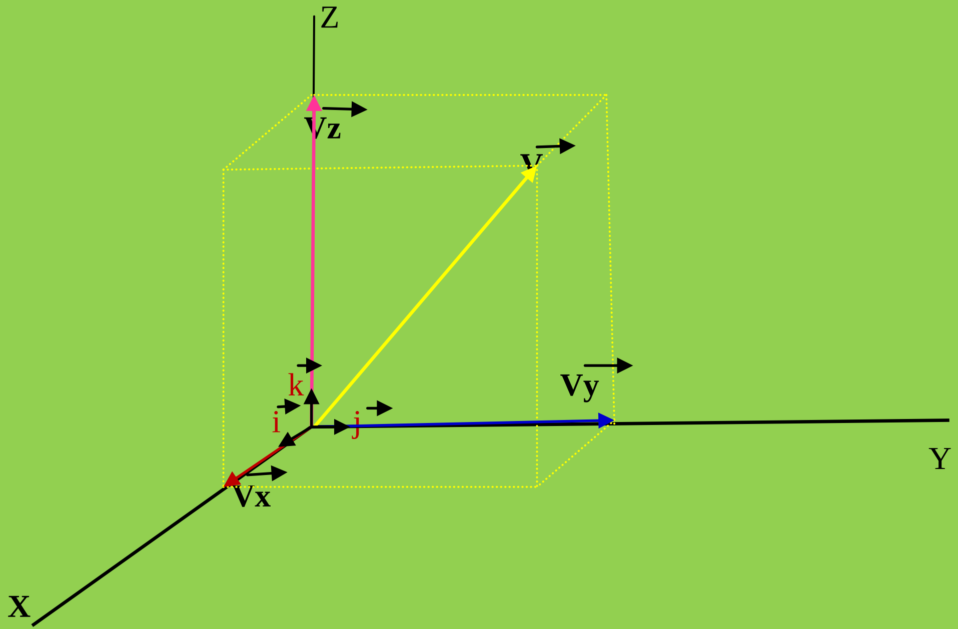


CD [($x_3 - x_2$), ($y_3 - y_2$)]
CD [(2 – x_2) , (0 – y_2)]
Por las mismas razones del vector $\overrightarrow{AB}$:
(2,-1) = [(2-x_2),(0-y_2]
2 = 2 – x_2 ; x_2 = 0
-1 = 0 –y_2 ; y_2 = 1

El punto C será C(0,1) y el vector CB [(2 – 0) , (0 – 1)]

$\overrightarrow{CB}\,(2 , -1)$; $\overrightarrow{CB} = 2\,\vec{i} - \vec{j}$

Si trabajamos en el espacio todo vector tiene tres componentes como se pone de manifiesto en la figura siguiente:



Podemos escribir al igual que en el plano: $\vec{V}\ (\ \vec{V}x\ ,\ \vec{V}y\ ,\ \vec{V}z\ )$ **Componentes cartesianas.**

También podemos establecer la igualdad: $\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y + \vec{V}z$

En fución de los vectores unitarios: $\vec{V} = Vx\,\vec{i} + Vy\,\vec{j} + Vz\,\vec{k}$

Como en el plano, se cumple que el módulo de $\vec{V}$ es:

$$|\,\vec{V}\,| = [\,|\vec{V}x|^2 + |\vec{V}y|^2 + |\vec{V}z|^2]^{1/2}$$

Ejercicio resuelto
Calcular el vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v}$(-1,1,2).

Resolución

$v = [\,(-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2}$; $v = (\,6\,)^{1/2} = 2{,}44$

5.1.- Suma de Vectores.

Video: Suma de vectores
http://www.youtube.com/watch?v=Jk3PhjaNSvw

Suma de Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Suma y resta de Vectores
http://www.vitutor.com/geo/vec/a_6.html

Suma de Vectores
http://www.jfinternational.com/mf/suma-vectores-fisica.html

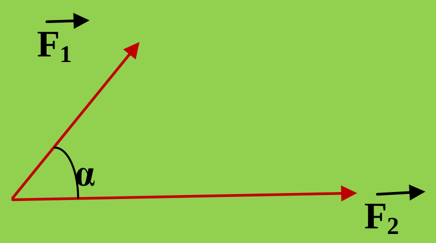
Suma de vectores.
http://www.escueladeverano.cl/fisica/verano2001/cinematica2/cin2d02.htm

Podemos realizar la suma de vectores mediante dos formas:

a) ***Gráficamente***.
b) ***Vectorialmente***.

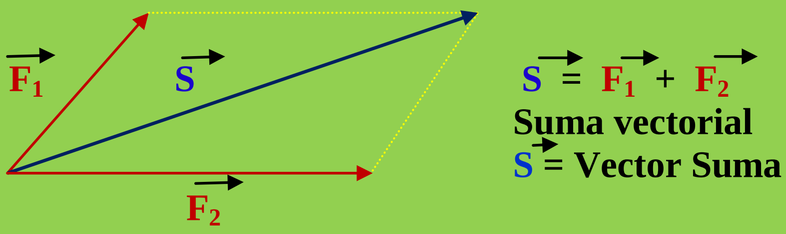
Gráficamente:

Supongamos los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, que forman entre ellos un ángulo α, como muestra la figura adjunta:

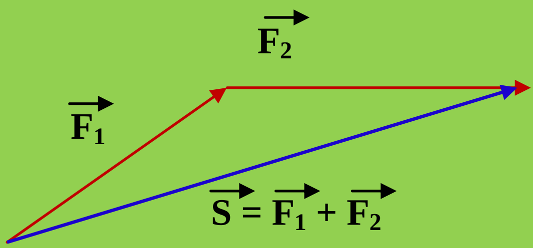


La suma de estos dos vectores concurrentes en sus puntos origen la podemos realizar mediante la *regla del paralelogramo*. Consiste en

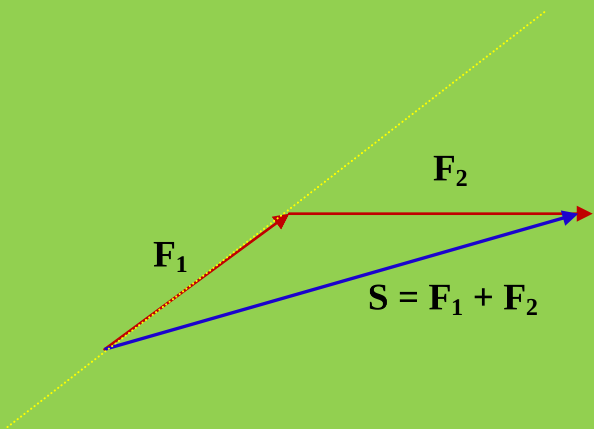
trazar desde el extremo del primer vector un vector paralelo al segundo vector y trazar desde el extremo del segundo vector otro paralelo al primer vector:



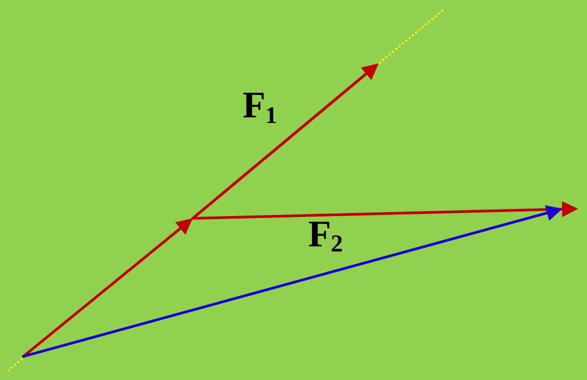
Puede ocurrir la circunstancia que los vectores sean concurrentes en el extremo de uno de los vectores y el origen del otro:



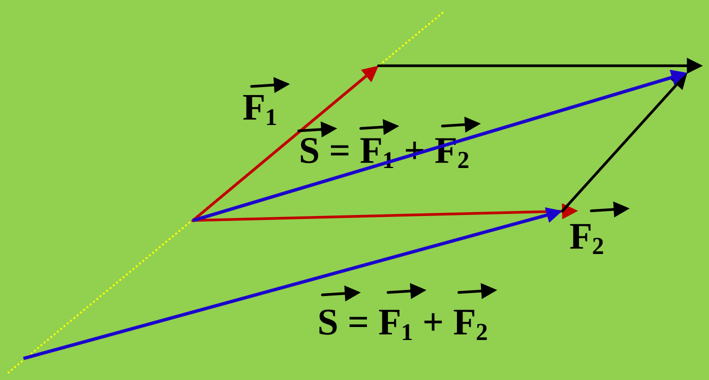
Si nos basamos en las características de los vectores deslizantes y vectores equipolentes podremos utilizar la regla del paralelogramos y llegar a las mismas conclusiones que en el primer método gráfico:



Deslizaremos el vector F_1:

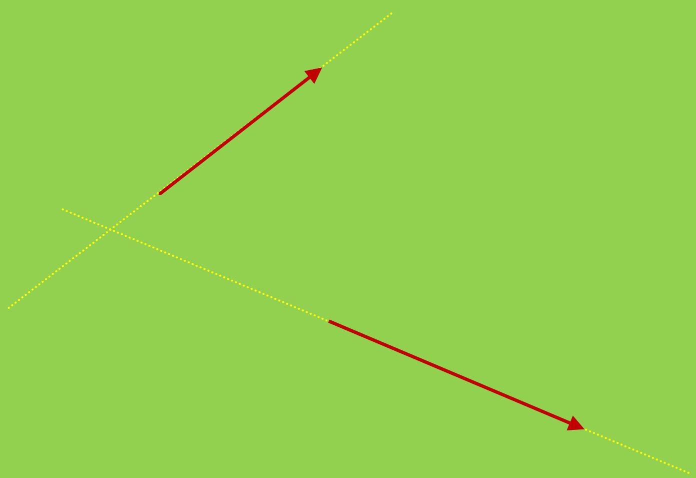


Aplicamos ahora la regla del paralelogramo:

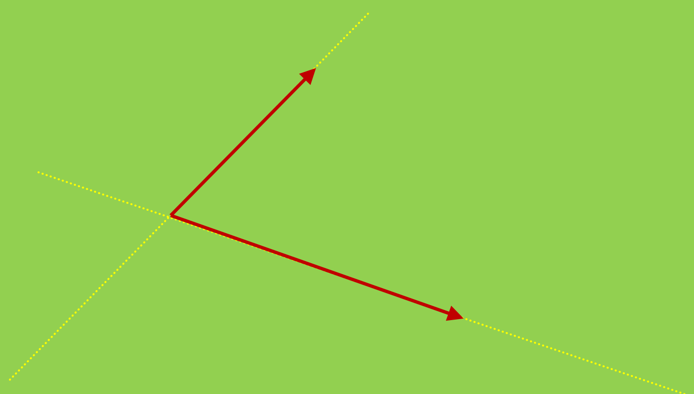


Los dos vectores S comprobar que son equipolentes, es decir, mismo módulo, misma dirección y mismo sentido.

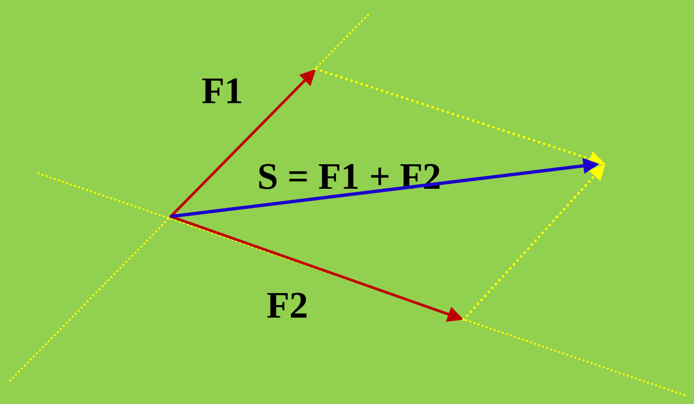
Podríamos suponer que las dos fuerzas actúan sobre el mismo cuerpo pero no son vectores concurrentes:



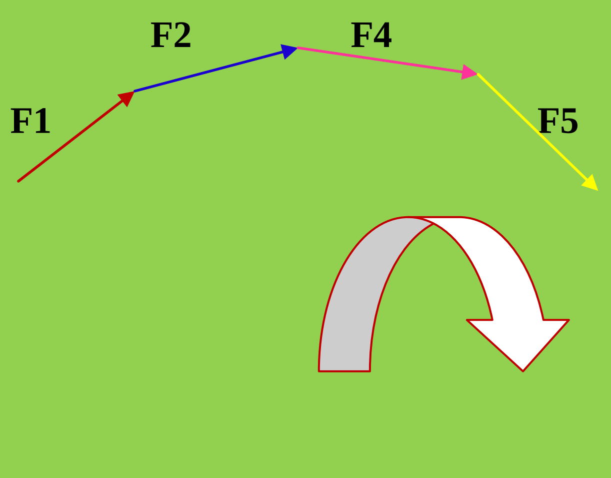
Deslizamos los dos vectores hasta que concurran en un punto:



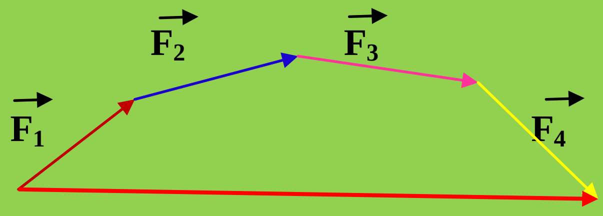
Podemos aplicar la regla del paralelogramo:



Otra circunstancia que nos podemos encontrar es determinar la suma o resultante del conjunto de vectores de la gráfica adjunta:

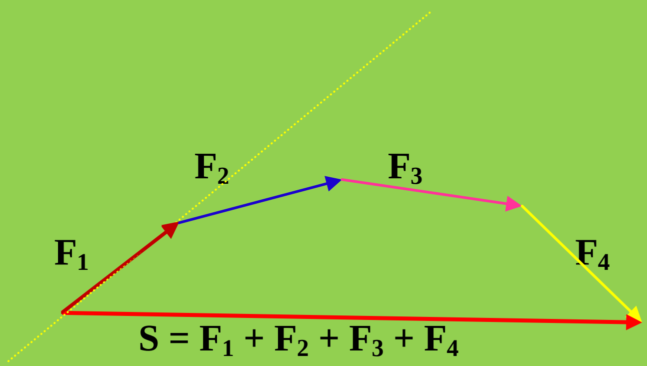


El **vector suma** **es un vector que tiene su *origen en el origen del primer* vector y su extremo en el *extremo del último vector*:**



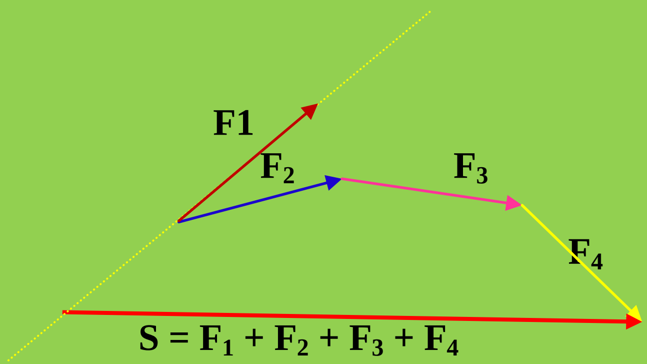
$$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Este vector suma se puede obtener gráficamente por deslizamiento, equipolencia de vectores y regla del paralelogramo:



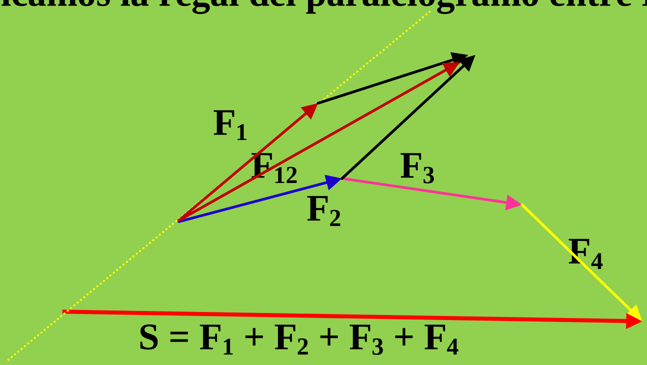
$$S = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

Deslizamos F_1:



$$S = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

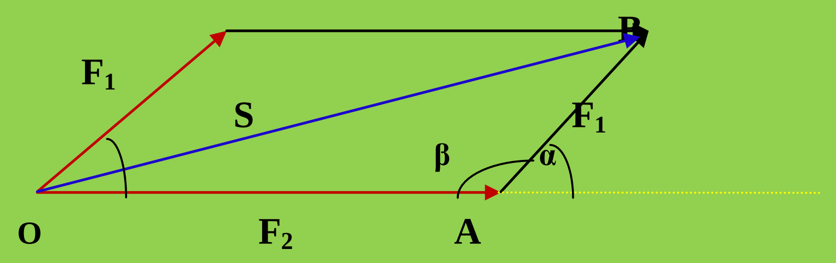
Aplicamos la regal del paralelogramo entre F_1 y F_2:



$$S = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

A continuación haremos lo mismo con F_{12} y F_3 hasta llegar a la F_{123} con F_4 y obtendremos un vector equipolente al vector Suma.

Mediante el *Teorema del coseno* podemos establecer el módulo del vector suma:



Tomemos el triángulo $\widehat{OAB}$ y apliquemos el Teorema del coseno:

$$S^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, \cos \beta$$

"*α*" y "*β*" son ángulos suplementarios y se cumple:

$$\cos \beta = - \operatorname{sen} \alpha$$

$$S^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, (\, - \cos \alpha\,)$$

$$S^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, \cos \alpha$$

$$\boxed{S = (\, F_1^2 + F_2^2 + 2 \,.\, F_1 \,.\, F_2 \,.\, \cos\alpha)^{1/2}}$$

Todo lo que hemos hecho hasta el momento es el trabajo con vectores desde el punto de vista gráfico, obteniendo el módulo de la resultante de un conjunto de vectores. Hemos utilizado el módulo de todos los vectores aplicados hasta el momento.

Ejercicio resuelto

Encuentre el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud sabiendo que su resultante tiene 20 unidades de longitud.

Resolución

Recordar:

$$S = (F_1^2 + F_2^2 + 2 \, . \, F_1 \, . \, F_2 \, . \cos \alpha)^{1/2}$$

$F_1 = 10$ udl
$F_2 = 15$ udl
$S = 20$ udl

$$20^2 = 10^2 + 15^2 + 2 \, . \, 10 \, . \, 15 \, . \cos \alpha$$
$$400 = 100 + 225 + 300 \cos \alpha$$
$$400 - 100 - 225 = 300 \cos \alpha \;\; ; \;\; 75 = 300 \cos \alpha$$

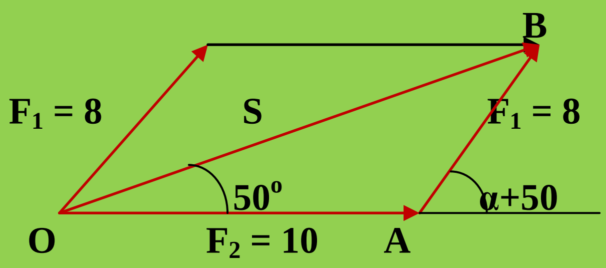
$$\cos \alpha = 75/300 \;\; ; \;\; \cos \alpha = 0{,}25 \rightarrow \alpha = 75{,}5\ ^o$$

La pregunta es ¿ si me piden obtener el módulo del vector suma pero parto de las componentes de los dos vectores y no del módulo? Utilizaremos el método Vectorial:

Ejercicio resuelto

Encuentre el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50º con el vector mayor.

Resolución



En el triángulo $\widehat{OAB}$ de la figura anterior y por el teorema del coseno:

$$F_1^2 = S^2 + F_2^2 - 2 \, . \, S \, . \, F_1 \, . \cos \alpha \;\; ; \;\; 64 = (S^2 + 100 - 2 \, . \, S \, . \, 10 \cos 50º)^{1/2}$$

$$64 = S^2 + 100 - 12{,}8 \, S \;\; ; \;\; S^2 - 12{,}8 \, S + 36 = 0$$

$$S = 12{,}8 \pm (163{,}84 - 144)^{1/2} \; / \; 2$$

$$S = 12{,}8 \pm 4{,}45 \, / \, 2$$

$$S_1 = (12{,}8 + 4{,}45) /2 = 8{,}62$$

$$S_2 = (12{,}8 - 4{,}45) / 2 = 4{,}17$$

***Vectorialmente tomaremos S_1*. Es menor que el valor de F_2 pero mayor que F_1. Lo que no se puede cumplir es que el módulo del vector suma sea inferior al valor de los vectores individualmente.**

Conociendo el valor del S podemos aplicar la ecuación de la suma de dos vectores para obtener un vector resultante S:

$S_2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha$

$8{,}62^2 = 8^2 + 10^2 + 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos \alpha$

$74{,}3 = 64 + 100 + 160 \cdot \cos \alpha$

$74{,}3 – 64 – 100 = 160 \cos \alpha$

$-89{,}7 = 160 \cos \alpha$; $\cos \alpha = -89{,}7 / 160$; $\cos \alpha = -0{,}56$

$$\alpha = 124{,}1^o$$

Supongamos dos vectores F_1 y F_2, en función de sus componentes:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = F_{1x}\ i + F_{1y}\ j + F_{1z}\ k \\ F_2 = F_{2x}\ i + F_{2y}\ j + F_{2z}\ k \end{array}\right\}$$

Recordemos : $\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$S = (F_{1x}\, i + F_{1y}\, j + F_{1z}\, k) + (F_{2x}\, i + F_{2y}\, j + F_{2z}\, k) =$$

$$= (F_{1x} + F_{2x})\ i + (F_{1y} + F_{2y})\ j + (F_{1z} + F_{2z})\ k$$

Su módulo:

$$\boxed{S = [\,(F_{1x} + F_{2x})^2 + (F_{1y} + F_{2y})^2 + (F_{1z} + F_{2z})^2\,]^{1/2}}$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{z} = 8\,\vec{i} + \vec{j} - 3\,\vec{k}$. Determinar el vector unitario en la dirección y el sentido del vector $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{z}$.

Resolución

S = (3 i - 2 j + 3 k) + (2 i - 6 j + k) + (8 i + j – 3 k)

S = 13 i - 7 j + k

S = [(13^2 + (-7)^2 + 1^2)]$^{1/2}$; *S = 14,8*

Recordemos que todo vector es igual al módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección y sentido del vector:

S = S . u ; u = S/ S

u = (13 i – 7 j + k)/ 14,8 ; u = 13/14,8 i - 7/14,8 j + 1/14,8 k

5.2.- Diferencia de vectores.

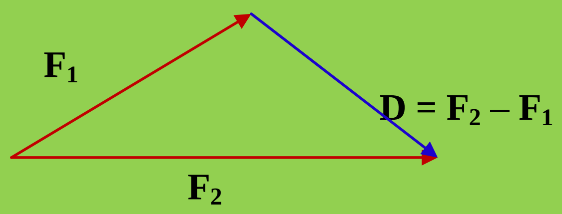
Video: Suma y resta de vectores. Método gráfico y analítico
http://www.youtube.com/watch?v=PuMfJalqorY

Resta de vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

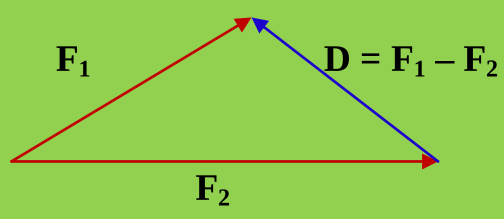
Resta de Vectores
http://www.vitutor.com/geo/vec/a_6.html

Gráficamente

Supongamos dos vectores, F_1 y F_2 en el gráfico siguiente:



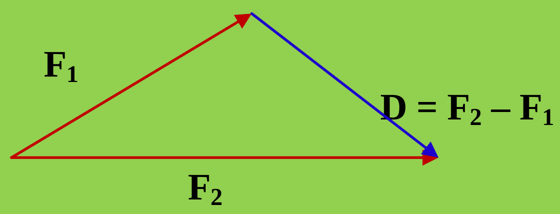
También podría ser:



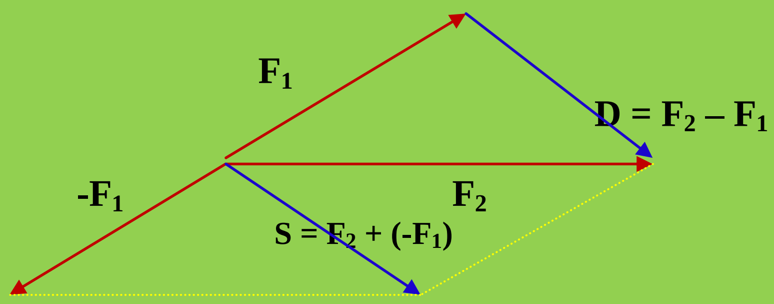
Fijaros en las puntas de flecha, son las que determinan el minuendo y el sustraendo de la ecuación de la Diferencia de vectores.

En los dos casos no podemos aplicar la regla del paralelogramo puesto que esta lo que nos permite es conocer gráficamente la suma de dos vectores. Sin embargo si encontráramos algún camino para poder aplicar dicha regla el problema estaría resuelto.

Consideremos el primer caso:



Vamos a sumar a F_2 el vector opuesto a F_1:



Ahora sí podemos aplicar la regla del paralelogramo:

$$\vec{S} = F_2 + (-F_1) = F_2 – F_1 = \vec{D}$$

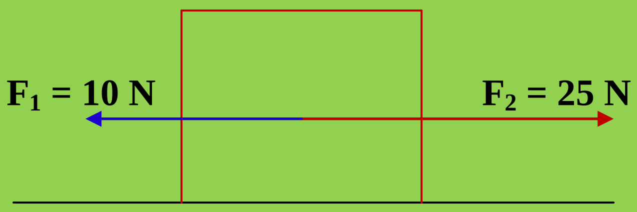
El vector $\vec{S}$ y el vector $\vec{D}$ son *vectores equipolentes* (mismo módulo y paralelos).

Podríamos hacer lo mismo con el segundo caso.

Podemos poner un ejemplo en donde trabajando directamente con los módulos de las fuerzas y sabiendo que en la diferencia entre vectores la regla del paralelogramo no se podía utilizar directamente, la fórmula final para obtener la Diferencia la obtenemos del Teorema del coseno y por lo tanto de la regla del paralelogramo:

Ejercicio resuelto

Sobre un cuerpo de masa 500 g actúan dos fuerzas, F_1 y F_2, según el diagrama:



Determinar la el espacio recorrido a los 10 s de iniciado el movimiento.

Cinemáticamente:

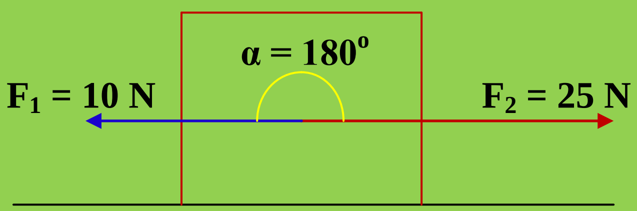
$$e = e_o + Vo \cdot t + ½ \cdot a \cdot t^2$$

como $e_o = 0$ y $Vo = 0$ $\rightarrow$ $\boxed{e = ½ \cdot a \cdot t^2}$

Necesitamos conocer la aceleración que adquiere el cuerpo y según el 2º Principio de la Dinámica nos dice:

$$\boxed{F = m \cdot a}$$

Conocida la fuerza podremos obtener la aceleración. Para obtener la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo volveremos a la gráfica inicial:



Según el diagrama de fuerzas, la fuerza resultante es la diferencia de las dos fuerzas (15 N), pero quiero que veáis como utilizando el *teorema del coseno*, que en una diferencia de vectores no se podía aplicar directamente, nos lleva a ese valor de la fuerza resultante que todos tenéis en mente:

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2. F_2 \cdot F_1 \cdot \cos \alpha)^{1/2}$$

$\alpha = 180^o \rightarrow \cos 180^o = -1$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 . F_1 . F_2 . \cos \alpha)^{1/2}$$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 + 2 . F_1 . F_2 . \cos 180^o)^{1/2}$$

$$F_R = [F_2^2 + F_1^2 + 2 . F_1 . F_2 . (-1)]^{1/2}$$

$$F_R = (F_2^2 + F_1^2 - 2 . F_1 . F_2)^{1/2}$$

$$F_R = [(F_2 - F_1)^2]^{1/2} \; ; \; \boxed{F_R = F_2 - F_1}$$

La fuerza que actúa sobre el cuerpo vale:

$$F_R = 25 - 10 = 15\ N$$

La aceleración adquirida valdrá:

$$F_R = m . a \; ; \; a = F_R / m \; ; \; a = 15\ N/0{,}500\ Kg \; ; \; a = 30\ m.s^{-1}$$

El espácio recorrido será:

$$e = ½ . a . t^2 \; ; \; e = ½ . 30 . 10^2 = 1500\ m$$

Si *no trabajamos con módulos* de vectores sino con componentes de los vectores:

$$F_1 = F_{1x}\ i + F_{1y}\ j + F_{1z}\ k$$

$$F_2 = F_{2x}\ i + F_{2y}\ j + F_{2z}\ k$$

$$D = F_1 - F_2 = (F_{1x}\ i + F_{1y}\ j + F_{1z}\ K) - (F_{2x}\ i + F_{2y}\ j + F_{2z}\ k)$$

$$\boxed{D = (F_{1x} - F_{2x})\ i + (F_{1y} - F_{2y})\ j + (F_{1z} - F_{2z})\ k}$$

El módulo del vector Diferencia será:

$$\boxed{D = [(F_{1x} - F_{2x})^2 + (F_{1y} - F_{2y})^2 + (F_{1z} - F_{2z})^2]^{1/2}}$$

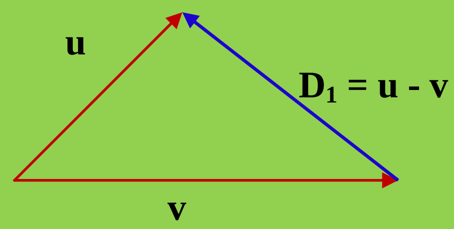
Ejercicio resuelto
Dados los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$, determinar:

a) **El vector unitario en la dirección y sentido del vector $D_1 = u – v$.**
b) **El vector unitario en la dirección y sentido del vector $D_2 = v - u$**

Resolución

$u = 3\ i - 2\ j + 3\ k$
$v = 2\ i - 6\ j + 1\ k$

a) $D_1 = u - v$



$D_1 = (3\,i - 2\,j + 3\,k) – (2\,i - 6\,j + k) =$
$= (3 -2)\ i + [(-2 – (-6)]\ j + (3- 1)\ k =$
$= i + 4\,j + 2\,k$

Recordemos:

$D_1 = D_1 \cdot a$ $\qquad$ a = vector unitario de D_1

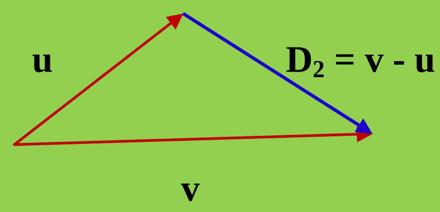
$a = D_1/D_1$

Calculemos el módulo del vector D_1:

$D_1 = (1^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2}$; $D_1 = (21)^{1/2} = 4{,}58$

$a = (i + 4\ j + 2\ k)/ 4{,}58$; $a = 1/4{,}58\ i + 4/4{,}58\ j + 2/4{,}58\ k$

$$\boxed{a = 0{,}21\ i + 0{,}87\ j + 0{,}43\ k}$$



$u = 3\ i - 2\ j + 3\ k$
$v = 2\ i - 6\ j + 1\ k$

$D_2 = v - u$
$D_2 = (2\ i - 6\ j + k) - (3\ i - 2\ j + 3\ k)$
$D_2 = (2 - 3)\ i + [(-6) - (-2)]\ j + (1 - 3)\ k$
$D_2 = -\ i - 4\ j - 2\ k$

$D_2 = D_2 \cdot b$; b = vector unitario D_2

$b = D_2/D_2$

$b = (2\ i - 6\ j + k)/D_2$
$D_2 = [(2^2 + (-6)^2 + 1^2)]^{1/2}$; $D_2 = (41)^{1/2} = 6{,}4$

$b = 2/6{,}4\ i - 6/6{,}4\ j + 1/6{,}4\ k$

$$\boxed{b = 0{,}31\ i - 0{,}93\ j + 0{,}15\ k}$$

5.3.- Producto escalar de dos Vectores.

Video: Producto de un escalar por un vector
http://www.youtube.com/watch?v=6yn44Yrtxyo

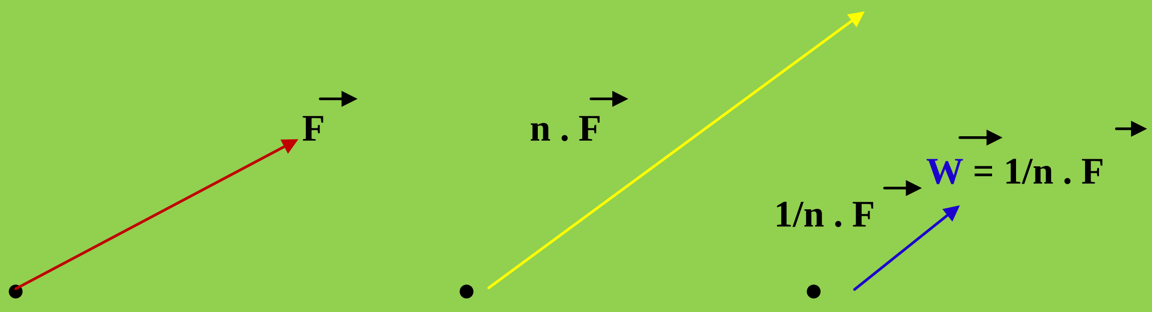
Producto de un Escalar por un Vector
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Suma y resta de vectores. Producto de un escalar por un vector
http://www.escueladeverano.cl/fisica/verano2001/cinematica2/cin2d02.htm

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR.-

Es un nuevo vector de la misma dirección, del mismo sentido y de módulo tantas veces mayor o menor, según sea el escalar (entero o quebrado).

Sea el vector $\vec{F} = F_x\ i + F_y\ j + F_z\ k$: $\vec{T} = n \cdot \vec{F}$



Desarrollemos la igualdad $\vec{T} = n \cdot \vec{F}$

$T = n \cdot (F_x\ i + F_y\ j + F_z\ k)\ ;\ T = nF_x\ i + nF_y\ j + nF_z\ k$

$$T = [(nF_x)^2 + (nF_y)^2 + (nF_z)^2]^{1/2} = (n^2 \cdot F_x^2 + n^2 \cdot F_y^2 + n^2 \cdot F_z^2)^{1/2} =$$

$$T = [n^2 (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)]^{1/2}$$

$$T = n \cdot (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}$$

Como:

$$F = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}$$

$$\boxed{T = n \cdot F}$$

Si el módulo de F es de 15, al multiplicar el vector F por 5 su módulo pasaría 75:

$$F = 15\ ;\quad 5 \cdot F = 5 \cdot 15 = 75.$$

Si el vector $\vec{F}$ lo multiplicamos por 1/n nos quedaría:

$W = 1/n \cdot F = 1/n (F_x\ i + F_y\ j + F_z\ k$

$W = F_x/n\ i + F_y/n\ j + F_z/n\ k$

$W = [1/n^2 (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)]^{1/2}$

$$W = 1/n (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}$$

Como:

$$F = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{1/2}$$

$$\boxed{W = 1/n \cdot F}$$

Si el módulo de F vale 15 y multiplicamos el vector F por 1/3 nos quedaría:

$$\frac{1}{3} \cdot F = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores: $\vec{u} = 3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{v} = 2\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 12\,\vec{k}$, **determinar el modulo de los vectores:**

a) $\vec{R} = 2\,\vec{u} - \vec{v} + 3/2\,\vec{w}$

b) $\vec{S} = 1/3\,\vec{u} + 2\,\vec{v} - 5\,\vec{w}$

Resolución

a) $R = 2\,u - 1\,v + 3/2\,w = 2\,(3\,i - 2\,j + 3\,k) - (2\,i - 6\,j + k) +$
$+ 3/2\,(3\,i - 6\,j + 12\,k) = 6\,i - 4\,j + 6\,k - 2\,i + 6\,j - k +$
$+ 9/2\,i - 18/2\,j + 36/2\,k = (6 - 2 + 9/2)\,i + (-4\,j + 6\,j - 18/2)\,j +$
$+ (6 - 1 + 36/2)\,k = 8{,}5\,i - 7\,i + 23\,k$

$$R = (8{,}5^2 + (-7)^2 + 23^2)^{1/2}$$

$$R = (72{,}25 + 49 + 529)^{1/2} = 650{,}25^{1/2} = 25{,}5$$

b) $S = 1/3\,u + 2\,v - 5\,w$

$S = 1/3\,(3\,i - 2\,j + 3\,k) + 2\,(2\,i - 6\,j + k) - 5\,(3\,i - 6\,j + 12\,k) =$
$= i - 2/3\,j + k + 4i - 12\,j + 2\,k - 15\,i + 30\,j - 60\,k =$
$= (1 + 4 - 15)\,i + (-2/3 - 12 + 30)\,j + (1 + 2 - 60)\,k =$
$= -10\,i + 17{,}34\,j - 57\,k$

$$S = [(-10)^2 + (17{,}34)^2 + (-57)^2]^{1/2} = (100 + 300{,}67 + 3249)^{1/2} =$$
$$= 3649{,}67^{1/2} = 60{,}41$$

Producto Escalar de dos Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

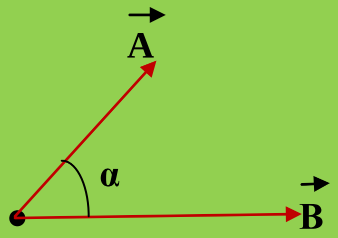
Producto escalar de dos vectores
http://www.vitutor.com/geo/vec/b_7.html

Producto escalar de dos vectores
http://cabierta.uchile.cl/libros/c-utreras/node139.html

Producto escalar de dos vectores (interés)
http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA04/Producto%20escalar.htm

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.-

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define *producto escalar* entre ellos, como el *número* (escalar) que se obtiene multiplicando el *módulo de A por el módulo de B y por el coseno del ángulo que forman A y B*.



$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha}$$

Propiedades del producto escalar:

a) ***Propiedad conmutativa:*** $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

b) ***Propiedad distributiva:*** $\vec{A} (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Vamos a desarrollar el producto escalar de dos vectores en función de la definición del mismo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\, i + A_y\, j + A_z\, k) \cdot (B_x\, i + B_y\, j + B_z\, k) = A_xB_x\; i \cdot i + A_xB_y\; i \cdot j + A_xB_z\; i \cdot k + A_yB_x\; j \cdot i + A_yB_y\; j \cdot j + A_yB_z\; j \cdot k + A_zB_x\; k \cdot i + A_zB_y\; k \cdot j + A_zB_z\; k \cdot k =$

sabemos que: $i \cdot i = 1 \cdot 1 \cos 0^o = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$j \cdot j = 1 \cdot 1 \cos 0^o = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
$k \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^o = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

También sabemos que los vectores i , j y k son ortogonales, es decir, forman entre ellos un ángulo de 90º. En base a ello:

$i \cdot j = 1 \cdot 1 \cos 90^o = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$
$i \cdot k = 0$
$j \cdot i = 0$
$j \cdot k = 0$
$k \cdot i = 0$

k . j = 0
Podemos generalizar:

i ⊥ j ⊥ k ⊥ i → α = 90º → cos 90º = 0

De la expresión:

A . B = (Ax i + Ay j + Az k) . (Bx i + By j + Bz k) = AxBx i . i + AxBy ~~i . j~~ + AxBz ~~i . k~~ + AyBx ~~j . i~~ + AyBy j . j + AyBz ~~j . k~~ + AzBx ~~k . i~~ + AzBy ~~k . j~~ + AzBz k . k = AxBx . 1 + AyBy . 1 + AzBz . 1 =
= AxBx + AyBy + AzBz

Obtenemos otra expresión del producto escalar de dos vectores:

A . B = *AxBx + AyBy + AzBz*

Ejercicio resuelto
Calcule el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ (5, -2 , 1) y $\vec{B}$ (-1 , 3 , -2).

Resolución

Puesto que el ejercicio no nos determina el ángulo que forman los vectores para poder obtener el producto escalar utilizaremos la ecuación:

A . B = AxBx + AyBy + AzBz

$\vec{A} \cdot \vec{B}$ = 5 . (-1) + (-2) . 3 + 1 . (-2) = - 5 - 6 – 2 = -13

Ejercicio resuelto
Determinar el ángulo que forman los dos vectores del ejercicio anterior

Resolución

Recordemos que:

A . B = A . B . cos α

cos α = A . B / A . B (1)

El numerador es conocido luego calculemos los módulos de los vectores A y B:

A = ($5^2 + (-2)^2 + 1^2)^{1/2} = 173^{1/2}$ = *13,15*

B = $[(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2]^{1/2}$ = *14*

Volviendo a la ecuación (1)

$$\cos \alpha = -13/ 13{,}15 \cdot 14 = - 13/ 184{,}1 = - 0{,}07$$

$$\alpha = 94{,}01^o$$

Ejercicio resuelto

Calcular el valor de "a" para que los vectores $\vec{u} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$ y $\vec{v} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ formen un ángulo de 45^o

Resolución

Recordemos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{v} / u \cdot v \quad (1)$$

De la ecuación anterior conocemos:

$\cos 45^o = 0{,}7$

$u = [(3^2 + 4^2 + (-2)^2]^{1/2} = (29)^{1/2} = 5{,}38$

$v = [(a^2 + (-2)^2 + 2^2]^{1/2} = (a^2 +8)^{1/2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z = 3a - 8 - 4 = 3a - 12$

Si nos vamos a (1):

$$0{,}7 = (3a - 12)/ 5{,}38 \cdot (a^2 +8)^{1/2}$$

trabajando matemáticamente:

$0{,}7 \cdot 5{,}38 \cdot (a^2 + 8)^{1/2} = 3a - 12$

$(a^2 + 8)^{1/2} = (3a – 12)/ 0,7 . 5,38$

$(a^2 + 8)^{1/2} = (3a – 12)/3,76$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$a^2 + 8 = (3a – 12)^2/14,13$; $14,13 . (a^2 + 8) = 9a^2 + 144 – 72a$

$14,13\ a^2 + 113,04 = 9a^2 + 144 – 72a$

$14,13\ a^2 – 9a^2 – 72a + 113,04 – 144 = 0$

$5,13\ a^2 – 72\ a – 30,96 = 0$

$a = 72 \pm (5184 + 635,29)^{1/2}/ 10,26$

$a = 72 \pm 76,28/10,26$

$a_1 = 72 + 76,28/10,26 = 14,45$

$a_2 = 72 – 76,28/10,26 = -0,41$

Ejercicio resuelto
Determinar el valor del parámetro "a" para que los vectores $\vec{x} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$; $\vec{y} = -\,\vec{i} + a\,\vec{j} + \vec{k}$ **sean perpendiculares.**

Resolución

Si los vectores son perpendiculares el ángulo que forman entre ellos es de 90º. Esto implica:

$$x . y = x . y . \cos \alpha$$

$$x . y = x . y . \cos 90º = x . y . 0 = 0$$

Para que dos vectores *sean perpendiculares su producto escalar debe ser igual a cero:*

También sabemos que:

$$\vec{x} . \vec{y} = x_x y_x + x_y y_y + x_z y_z = 0$$

$$\vec{x} = a\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \ ; \quad y = -\,\vec{i} + a\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$-a - 2a + 3 = 0 \;;\; -3a = -3 \;;\; a = 1$$

Ejercicio resuelto(Fuente Enunciado: Depart. F/Q I.E.S Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado los vectores $\vec{A}(4, -3, 0)$ y $\vec{B}(8, 6, 0)$, calcula:

a) $2\vec{A} + \vec{B}$

b) El producto escalar de $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

c) El ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Resolución

a) $2\vec{A} + \vec{B} = 2(4i + -3j) + (8i + 6j +) =$
$= 8i - 6j + 8i + 6j = 16\,i$

b) $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz = 4 \cdot 8 + (-3) \cdot 6 = 32 - 18 = 14$

c) $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha \;;\; \cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} / A \cdot B$

$A = (4^2 + (-3)^2 +)^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

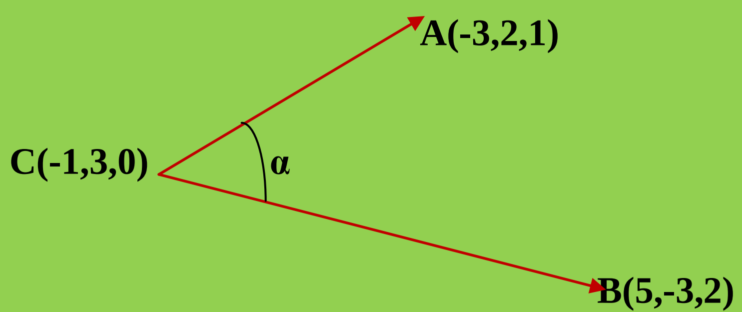
$B = (8^2 + 6^2)^{1/2} = 10$

$\cos\alpha = 14 / 5 \cdot 10 \;;\; \cos\alpha = 0{,}28 \rightarrow \alpha = 73{,}73^o$

Ejercicio resuelto(Fuente Enunciado: Depart. F/Q I.E.S Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dos vectores cuyos extremos son los puntos A(-3,2,1) y B(5,-3,2), tienen como origen común el punto C(-1,3,0). Calcular el producto escalar de ambos vectores y el ángulo que forman.

Resolución



$\vec{CA}\,[(-3) - (-1) \,,\, (2 - 3) \,,\, (1 - 0)] \;;\; \vec{CA}(-2, -1, 1)$

$\vec{CB}\,[5 - (-1), (-3) - 3, (2 - 0)] \;;\; \vec{CB}(6, -6, 2)$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos\alpha$ (1)

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CAxCBx + CAyCBy + CAzCBz = (-2).6 + (-1).(-6) + 1.2 =$
$= -12 + 6 + 2 = -4$

De (1):

$\cos\alpha = \vec{CA} \cdot \vec{CB} / CA \cdot CB$ (2)

$CA = [(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 6^{1/2} = 2{,}45$
$CB = [6^2 + (-6)^2 + 2^2]^{1/2} = 76^{1/2} = 8{,}72$

Nos vamos a (2):

$\cos\alpha = -4 / (2{,}45 \cdot 8{,}72) = -4/21{,}36 = -0{,}18$; $\alpha = 100{,}4^o$

Ejercicio resuelto(Fuente Enunciado: Depart. F/Q I.E.S Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)
Dados los vectores a = 3 i + 5 j – k y b = i + 4 j – 2 k, calcula el producto escalar siguiente: (a – 5b) . (2 a + 6 b)

Resolución

5 b = 5 (i + 4 j – 2 k) = 5 i + 20 j – 10 k
2 a = 2 (3 i + 5 j – k) = 6 i + 10 j – 2 k
6 b = 6 (i + 4 j – 2 k) = 6 i + 24 j – 12 k

(a – 5 b) = (3 i + 5 j – 2 k) – (5 i + 20 j – 10 k) = - 2 i – 15 j + 8 k
(2 a + 6 b) = 6 i + 10 j – 2 k + 6 i + 24 j – 12 k =
= 12 i + 34 j – 14 k

Luego:

(a – 5 b) . (2 a + 6 b) = (-2) . 12 + (-15) . 34 – 112 = -24 – 510 – 112 =
= *646*

Ejercicio resuelto (Fuente Enunciado: Raúl González Medina. Resolución: A. Zaragoza López)
Comprobar que los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k ; $\vec{B}$ = i + 3 j – 5 k y $\vec{C}$ = 2 i – j + 4 k forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Cuando entre dos de los tres vectores dados exista un ángulo de 90º el triángulo será rectángulo. Tenemos que buscar el ángulo de 90º.

A = [$3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2}$ = *3,74*
B = [$1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2}$ = *5,91*
C = [$2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2}$ = *4,58*

Debemos recordar que:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$ (1) y $\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$ (2)

Recordemos también que el producto escalar es *conmutativo*. De la ecuación (2) obtenemos:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5) = 3 + 6 + 5 =$ *14*
$\vec{A} \cdot \vec{C} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 6 - 2 - 4 =$ *0*
$\vec{B} \cdot \vec{C} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 = 2 - 3 - 20 =$ *21*

De la ecuación (1):

$\cos\alpha = \vec{A} \cdot \vec{B} / A \cdot B$; $\cos\alpha = 14/ 14 \cdot 5,91 = 14/82,74 = 0,169$
$\alpha = 80,25^o$

$\cos\beta = \vec{A} \cdot \vec{C} / A \cdot C$; $\cos\beta = 0/3,74 \cdot 4,58 = 0$; *$\beta = 90^o$*

Aquí tenemos el ángulo que estábamos buscando y efectivamente se trata de un triángulo rectángulo.

5.4.- Producto vectorial de dos Vectores.

Producto Vectorial de dos Vectores
http://www.monografias.com/trabajos35/vectores/vectores.shtml

Producto vectorial de dos vectores
http://www.vitutor.com/analitica/vectores/producto_vectorial.html

Producto vectorial de dos vectores
http://platea.pntic.mec.es/anunezca/ayudas/producto_vectorial/producto_vectorial.htm

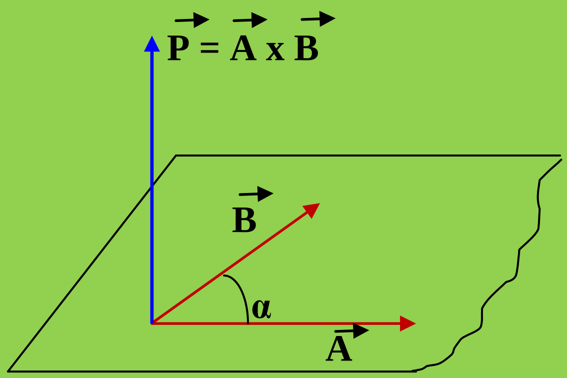
Video: Producto vectorial de dos vectores
http://www.youtube.com/watch?v=75AS_aruQ7Y

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.-

El producto vectorial de dos vectores es un nuevo *vector* de las características siguientes:

a) ***Módulo***: $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}\ \alpha$
b) ***Dirección***: **Perpendicular al plano determinado por los dos vectores.**
c) ***Sentido***: **El del avance del sacacorchos que gira del primero al segundo por el camino más corto.**

Realicemos el producto vectorial de $\vec{A} \times \vec{B}$ (es importante el orden de los vectores. Como veremos más adelante el producto vectorial de dos vectores no es conmutativo:



Observamos que el *vector* ($\vec{p}$) *producto vectorial ES PERPENDICULAR A LOS VECTORES $\vec{A}$ y $\vec{B}$.*

El módulo del producto vectorial, como dijimos anteriormente es:

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \text{sen}\ \alpha}$$

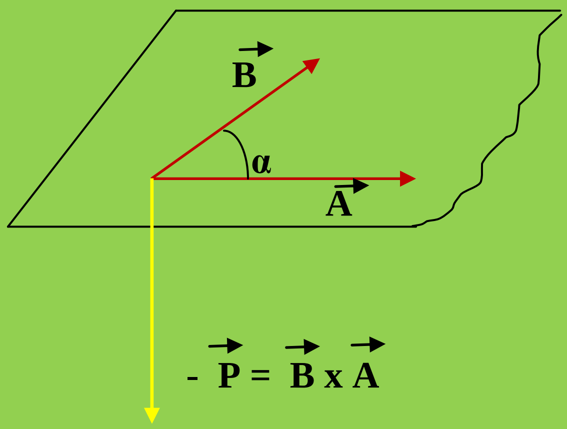
Según nuestra clave para simplificar los desarrollos:

$$A \times B = A \cdot B \cdot \text{sen}\ \alpha$$

El sentido del vector *producto vectorial* lo determina la llamada *"regla del sacacorchos"*. Explicaremos esta regla más adelante.

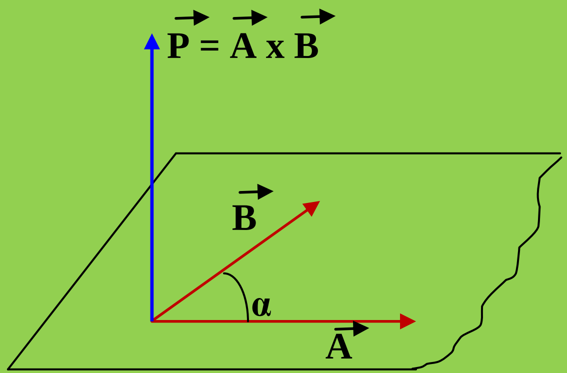
Propiedades del producto Vectorial:

a) **No cumple la *propiedad conmutativa*. Se puede apreciar en el dibujo anterior de obtención del vector $\vec{P}$ como consecuencia del producto $\vec{A} \times \vec{B}$. Vamos a calcular ahora el producto vectorial de $\vec{B} \times \vec{A}$:**

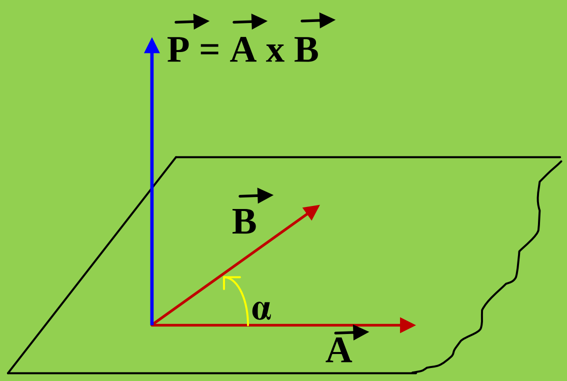


Para que entendáis la existencia de *$\vec{P}$* y *$-\vec{P}$* explicaremos la *"Regla del sacacorchos"*:

Estamos en el primer dibujo (A x B):

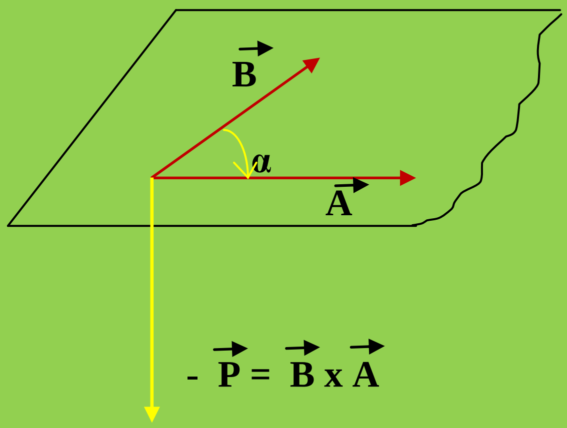


Imaginativamente poner en el punto de concurrencia de los dos vectores un *tornillo*. Por debajo del plano que contiene los vectores A y B pondremos un *destornillador* acoplado al tronillo. Ahora nos fijamos en la operación que queremos hacer (A x B). Hacer girar el destornillador en el sentido de salir de A Para llegar a B por el camino más corto (de izquierda a derecha):



¿Qué le ocurre al tornillo? Que gira en *sentido ascendente*, por ello el vector $\vec{P}$ manifiesta *su sentido* por encima del plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

En el segundo dibujo cuando realizamos la operación $\vec{B} \times \vec{A}$, salimos de $\vec{B}$ buscando a $\vec{A}$ por el camino más corto. El tornillo tiende a descender por debajo del plano que contiene los vectores y obtenemos el vector *OPUESTO* al vector $\vec{P}$, es decir $-\vec{P}$.



b) Cumple la propiedad distributiva.

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

c) El producto vectorial de dos vectores paralelos es igual al vector nulo:

$$\vec{A} \,||\, \vec{B} \rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

Es fácil de demostrar:

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \,.\, B \,.\, \text{sen}\, \alpha \;\; ; \;\; \alpha = 0^{o} \rightarrow \text{sen}\, 0^{o} = 0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot 0 = \vec{0} = 0$$

Obtengamos una expresión que nos permita obtener el vector *producto vectorial*:

A x B = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k) =
= AxBx (i x i) + AxBy (i x j) + AxBz (i x k) + AyBx (j x i) + AyBy (j x j) + AyBz (j x k) + AzBx (k x i) + AzBy (k x j) + AzBz (k x k)

En base al modulo del vector product vectorial podemos deducir que:

$$\vec{i} \times \vec{i} = 1 \cdot 1 \text{ sen } 0^o = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\vec{j} \times \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \text{sen}0^o = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
$$\vec{k} \times \vec{k} = 1 \cdot 1 \text{ sen } 0^o = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

De la expresión anterior podemos eliminar:

A x B = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k) =
= AxBx (~~i x i~~) + AxBy (i x j) + AxBz (i x k) + AyBx (j x i) + AyBy (~~j x j~~) + AyBz (j x k) + AzBx (k x i) + AzBy (k x j) + AzBz (~~k x k~~)

Nos queda:

$\vec{A}$ x $\vec{B}$ = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k) =
= AxBy (i x j) + AxBz (i x k) + AyBx (j x i) + AyBz (j x k) + AzBx (k x i) + AzBy (k x j)

Por la regla del Sacacorchos podemos obtener:

i x j = k ; i x k = -j ; j x i = -k ; j x k = i ; k x i = j ; k x j = -i.

Con todas estas condiciones podemos establecer que:

$\vec{A}$ x $\vec{B}$ = (Ax i + Ay j + Az k) x (Bx i + By j + Bz k) =
= AxBy k + AxBz (-j) + AyBx (-k) + AyBz i +AzBx j + AzBy (-i)

$\vec{A}$ x $\vec{B}$ = AxBy k - AxBz j - AyBx k + AyBz i + AzBx j - AzBy i =
= (AyBz – AzBy) i + (AzBx – AxBz) j + (AxBy – AyBx) k

Luego:

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = (AyBz - AzBy)\,\vec{i} + (AzBx - AxBz)\,\vec{j} + (AxBy - AyBx)\,\vec{k}}$$

Obtenemos un vector cuyo módulo es:

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = [(AyBz - AzBy)^2 + (AzBx - AxBz)^2 + (AxBy - AyBx)^2]^{1/2}}$$

Existen métodos más sencillos para obtener la fórmula del producto vectorial de dos vectores. El método a utilizar es el Cálculo de Matrices. No sabéis lo que es una matriz luego no tenéis más remedio que aceptar lo que se diga. El producto vectorial de dos vectores los podemos representar de la forma:

$\vec{A} = Ax\ i + Ay\ j + Az\ k$
$\vec{B} = Bx\ i + By\ j + Bz\ k$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Az & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix}$$

Estamos en una matriz 3x3 (tres filas/tres columnas). Las filas correspondientes a las columnas se ponen en el orden que reflejan en el producto que se va a realizar. Primer factor, primera fila. Aplicaremos la resolución de la matriz (lo que tenéis a la izquierda del signo igual) mediante el método de Sarrus. Este señor dice que a la suma de los productos de los factores que nos marque el camino azul le restaremos la suma de los productos de los factores que nos marque la línea amarilla.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i & j & k \\ Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} =$$

$$= A_yB_z\,\vec{i} + A_zB_x\,\vec{j} + A_xB_y\,\vec{k} - (A_yB_x\,\vec{k} + A_xB_z\,\vec{j} + A_zB_y\,\vec{i}) =$$

$$= \boxed{(A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}}$$

El mecanismo de Sarrus tiene el inconveniente de tener que aprender los caminos de las flechas. Existe una ampliación de este mecanismo en donde los caminos de los productos son más fáciles de recordar. Consiste el método en ampliar la matriz en dos filas más, repetimos la primera y la segunda. Veamos el método:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= A_yB_z\,\vec{i} + A_xB_y\,\vec{k} + B_xA_z\,\vec{j} - (A_yB_x\,\vec{k} + A_zB_y\,\vec{i} + B_zA_x\,\vec{j}) =$$

$$= \boxed{(A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} + (B_xA_z - B_zA_x)\,\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}}$$

Ejemplo resuelto (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza López)
Suponiendo dos vectores cuyos módulos son 7 y 8 respectivamente, y sabiendo que el ángulo que forman es de 30º, calcula el módulo del producto vectorial e indica el ángulo que forma con los dos vectores.

Resolución

Recordemos que:

$$|A \times B| = |A| \,.\, |B| \,.\, \text{sen}\,\alpha$$

$$| A \times B | = 7 \,.\, 8 \,.\, \text{sen } 30^o = 28$$

Por definición, el ángulo que forma con los dos vectores es de *90º*.

Ejemplo resuelto

Dados los vectores u (1 , 2 , 3) y v (-1 , 1, 2) calcular:

a) **Su producto vectorial.**
b) **El ángulo que forman los vectores**

Resolución

a)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right| = 4\, i + k + (-1) \,.\, 3 \,.\, j - [(-1) \,.\, 2 \,.\, k + 3\, i + 2\, j = 4\, i + k - 3\, j + 2\, k - 3\, i - 2\, j = \vec{i} - 5\, \vec{j} + 3\, \vec{k}$$

b) $|\vec{A} \times \vec{B}| = A \,.\, B \,.\, \text{sen } \alpha \quad ; \quad \text{sen } \alpha = |\vec{A} \times \vec{B}| / A \,.\, B \quad (1)$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = [\, 1^2 + (-5)^2 + 3^2]^{1/2} = 35^{1/2} = 5{,}9$

$A = (\, 1^2 + 2^2 + 3^2\,)^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$

$B = [\, (-1)^2 + 1^2 + 2^2]^{1/2} = 6^{1/2} = 2{,}45$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$\text{sen } \alpha = | A \times B | / A \,.\, B \quad ; \quad \text{sen } \alpha = 5{,}9 / 3{,}74 \,.\, 2{,}45$$

$$\text{sen } \alpha = 5{,}9 / 9{,}16 = 0{,}64 \rightarrow \alpha = 39{,}79^o$$

Ejemplo resuelto

Dado los vectores $\vec{u} = 3\, i - j + k$ y $\vec{v} = i + j + k$, hallar el producto vectorial de dichos vectores y comprobar que el vector obtenido es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k + j - [(-k) + i + 3j] =$$
$$= -i + 3k + j + k - i - 3j =$$
$$= -2i - 2j + 4k$$

sen α = | A x B | / A . B (1)

$p = [(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2]^{1/2} = 24^{1/2} = 4{,}89$

$A = [(3)^2 + (-1)^2 + 1^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$

$B = (1^2 + 1^2 + 1^2)^{1/2} = 3^{1/2} = 1{,}73$

Para calcular el ángulo que forma el vector producto vectorial con los vectores dados tenemos que trabajar independientemente con cada uno de ellos, es decir, p ⊥ A y p ⊥ B:

$p \cdot A = p \cdot A \cdot \cos \beta$; $(-6 + 2 + 4) = 4{,}89 \cdot 3{,}31 \cdot \cos \beta$

$0 = 16{,}18 \cdot \cos \beta$; $\cos \beta = 0 / 16{,}18 = 0 \rightarrow \beta = 90^o$

$p \cdot B = p \cdot B \cdot \cos \mu$; $[(-2) + (-2) + 4] = 4{,}89 \cdot 1{,}73 \cdot \cos \mu$

$0 = 8{,}45 \cos \mu$; $\cos \mu = 0 \rightarrow \mu = 90^o$

Ejemplo resuelto (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado los vectores $\vec{A}$ (2, -1, 1) y $\vec{B}$ (-1, 2, 1), calcular:

a) $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

b) $\vec{C} \cdot \vec{A}$ Discutir este último resultado y predecirlo sin calcularlo previamente

Resolución

a)

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -\,i + 4\,k - j - (\,k + 2\,i + 2\,j) = \\ &= -\,i + 4\,k - j - k - 2\,i - 2\,j = \\ &= -\,3\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \end{aligned}$$

b) $\vec{C}\ .\ \vec{A}$ → se trata de un producto escalar de dos vectores que como resultado se obtiene otro escalar. En este caso en concreto el vector $\vec{C}$ y el vector $\vec{A}$ son perpendiculares por las características de C. El producto escalar tiene la expresión:

$$\vec{C}\ .\ \vec{A} = C\ .\ A\ .\ \cos\alpha$$

Como $\alpha = 90º$ → $\cos 90º = 0$, luego $\vec{C}\ .\ \vec{A} = 0$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u} = 3\,i - j + k$ y $\vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$, hallar:

a) El producto $\vec{u} \times \vec{v}$.
b) El producto $\vec{v} \times \vec{u}$.
c) Compara los resultados anteriores.

Resolución

a) $\vec{u} = 3\,i - j + k$; $\vec{v} = 2\,i - 3\,j + k$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -\,i - 9\,k + 2\,j - [(-2)\,k + (-3)\,i + 3\,j] = \\ &= -\,i - 9\,k + 2\,j + 2\,k + 3\,i - 3\,j = \\ &= 2\,i - j - 7\,k \end{aligned}$$

b)

$$\vec{s} = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{k} + 3\,\mathbf{j} - (-9\,\mathbf{k} - \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}) =$$

$$= -3\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{k} + 3\,\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} =$$

$$= -2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\,\mathbf{k}$$

c) Los vectores obtenidos son:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} = 2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\,\mathbf{k} \\ \vec{s} = -2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\,\mathbf{k} \end{array}\right\}$$

Se cumple que $\vec{p} = -\vec{s}$

Hemos obtenidos dos vectores opuestos que se caracterizan por:

a) **Tener el mismo módulo.**
b) **La misma dirección.**
c) **Sentido contrario.**

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ (3, 1, -1) y $\vec{v}$ (2, 3, 4), hallar:

a) **Los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**
b) **El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.**
c) **Un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Resolución

a) $|\mathbf{u}| = [\,3^2 + 1^2 + (-1)^2]^{1/2} = 11^{1/2} = 3{,}31$

$|\mathbf{v}| = (\,2^2 + 3^2 + 4^2\,)^{1/2} = 29^{1/2} = 5{,}38$

b)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \end{array} \right| = 4\,i + 9\,k - 2\,j - (\,2\,k - 3\,i + 12\,j) =$$

$$= 4\,i + 9\,k - 2\,j - 2\,k + 3\,i - 12\,j =$$

$$= 7\,i - 14\,j + 7\,k$$

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector que le vamos a llamar $\vec{p}$. Este vector $\vec{p}$, por teoría es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego sólo nos hace falta calcular el vector unitario a $\vec{p}$:

$$\vec{p} = p \,.\, \vec{a} \quad ; \quad \vec{a} = \text{vector unitario al vector p}$$

$$\vec{a} = \vec{p} \,/\, p \quad (1)$$

$$p = [\,7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 470596^{1/2} = 686$$

Si nos vamos a (1):

$$\vec{a} = (\,7\,i - 14\,j + 7\,k\,) \,/\, 686 \quad ; \quad \vec{a} = 7/686\; i - 14 \,/\, 686\; j + 7 \,/\, 686\; K$$

Ejercicio resuelto

Hallar dos vectores de módulo la unidad y perpendiculares a (2, -2, 3) y (3, -3, 2).

Resolución

$$\vec{u} = 2\,i - 2\,j + 3\,k \quad ; \quad \vec{v} = 3\,i - 3\,j + 2\,k$$

Por definición sabemos que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a los dos vectores.

$\vec{u} = 2\,i - 2\,j + 3\,k$; $\vec{v} = 3\,i - 3\,j + 2\,k$

$$\vec{p} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ i & j & k \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$= -4\,i - 6\,k + 9\,j - (-6\,k - 9\,i + 4\,j) =$

$= -4\,i - 6\,k + 9\,j + 6\,k + 9\,i - 4\,j =$

$= 5\,i + 5\,j + 0\,k$

$\vec{r} = \vec{v} \times \vec{u}$ = **es el vector opuesto al vector $\vec{p}$, como vimos en ejemplo anterior, luego $\vec{r} = -5\,i - 5\,j - 0\,k$.**

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores que cumplen las siguientes condiciones:

a) **Son perpendiculares a los vectores u y v.**
b) **Tienen el mismo módulo.**
c) **Tienen la misma dirección.**
d) **Sentido contrario.**

Los vectores unitarios serán:

$\vec{p} = p \cdot \vec{a}$

$\vec{a}$ = **vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{p}$**

$p = (5^2 + 5^2 + 0^2)^{1/2} = 50^{1/2} = 7{,}07$

$\vec{a} = \vec{p} / p$; $\vec{a} = (5\,i + 5\,j + 0\,k) / 7{,}07 = 5/7{,}07\,i + 5/7{,}07\,j$

$\vec{r} = r \cdot \vec{b}$; $\vec{b}$ = **vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$**

$r = [(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2]^{1/2} = 7{,}07$

$\vec{b} = \vec{r} / r$; $b = (-5\,i - 5\,j - 0\,k)/7{,}07$; $b = -5/7{,}07\,i - 5/7{,}07\,j$

Ejemplo resuelto (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

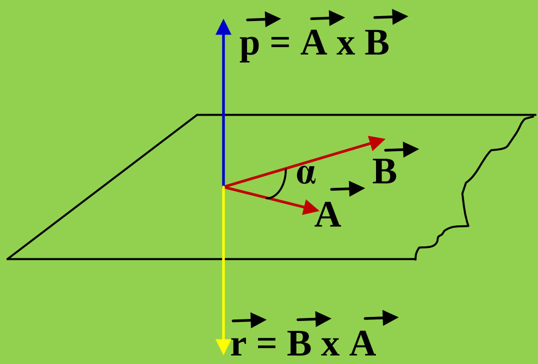
Dados los vectores $\vec{A}$ (3, -2, 2) y $\vec{B}$ (0, 2, 1); calcula los vectores de módulo 3 y perpendiculares a ambos vectores.

Resolución

Como sabemos, el producto vectorial de dos vectores es *otro vector perpendicular a los dos primeros*. Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} \\ \\ \vec{r} = \vec{B} \times \vec{A}\end{array}\right\}$$

$\vec{p}$ y $\vec{r}$ son dos vectores *PERPENDICULARES* a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y entre ellos son del mismo módulo, de la misma dirección y de sentido contrario, es decir, son *vectores opuestos*.



Se cumple que: $\vec{p} = -\vec{r}$

Calculemos $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B} \rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2\,i + 6\,k - (4\,i + 3\,j) = $$

$$= -2\,i + 6\,k - 4\,i - 3\,j =$$

$$= -6\,i - 3\,j + 6\,k$$

$$\vec{p} = -6\,i - 3\,j + 6\,k \rightarrow \vec{r} = 6\,i + 3\,j - 6\,k$$

Vamos a proceder a calcular los vectores unitarios de $\vec{p}$ y $\vec{r}$, luego los multiplicaremos por un escalar, *3*, obtendremos los vectores que nos pide el ejercicio:

$p = -6\,i - 3\,j + 6\,k \rightarrow r = 6\,i + 3\,j - 6\,k$

$p = [(-6)^2 + (-3)^2 + 6^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

$r = [\,6^2 + 3^2 + (-6)^2]^{1/2} = 81^{1/2} = 9$

Todo vector es igual a su modulo por el vector unitario en la dirección y sentido del mismo:

$\vec{p} = p \,.\, \vec{a}$; a es el vector unitario en la dirección y sentido de p

$\vec{r} = r \,.\, \vec{b}$; b " " " " r

$\vec{a} = \vec{p} \,/\, p$; $a = (-6\,i - 3\,j + 6\,k) / 9$; $a = -6/9\,i - 3/9\,j + 6/9\,K$

$\vec{a} = -2/3\,i - 1/3\,j + 2/3\,k$

$\vec{b} = \vec{r} \,/\, r$; $\vec{b} = (6\,i + 3\,j - 6\,k) / 9$; $\vec{b} = 6/9\,i + 3/9\,j - 6/9\,k$

$\vec{b} = 2/3\,i + 1/3\,j - 2/3\,k$

$\vec{S}$ y $\vec{T}$ son los vectores que nos pide el problema y para ello:

$\vec{S} = 3 \,.\, \vec{a}$; $\vec{S} = 3 \,.\, (-2/3\,i - 1/3\,j + 2/3\,k)$; $\vec{S} = -2\,i - j + 2\,k$

$\vec{T} = 3 \,.\, b$; $\vec{T} = 3 \,.\, (2/3\,i + 1/3\,j - 2/3\,k)$; $\vec{T} = 2\,i + j - 2\,k$

Ejemplo resuelto (Fuente Enunciado: Dpto. F/Q IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado los vectores A (4, -3, 0) y B (8, 6, 0), calcula:

a) **2 A + B**
b) **Un vector de modulo 1 en la dirección de A.**
c) **El producto escalar A . B**
d) **El ángulo que forman A y B**
e) **El producto vectorial de A x B**
f) **El módulo del producto vectorial A x B**

Resolución

a) 2 A + B = 2 . (4, -3, 0) + (8, 6, 0) = (8, -6, 0) + (8, 6 , 0) = 16 i

b) A = A . u ; u = A / A

$A = [\,4^2 + (-3)^2 + 0^2]^{1/2} = 25^{1/2} = 5$

$\vec{u} = (\,4, -3, 0\,) / 5$; $\vec{u} = (4/5\,, -3/5\,, 0)$

c) A . B = AxBx + AyBy + AzBz   A (4, -3, 0) y B (8, 6, 0)

A . B = 4 . 8 + (-3) . 6 + 0 . 0 = 32 – 18 + 0 = *14*

d) A . B = A . B . cos α (1); A . B = 14 (2)

$B = (8^2+6^2+0^2)^{1/2} = 10$

A = *5*

Utilizando las ecuaciones (1) y (2):

14 = 5 . 10 . cos α ; cos α = 14 / 50 = 0,28

α = 73,73º

e)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ i & j & k \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 24\,k - (\,-24\,k\,) = 48\,K$$

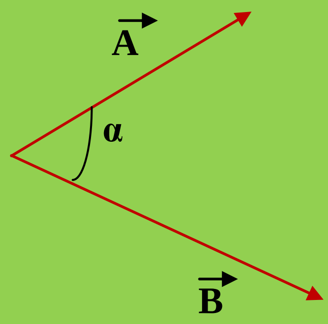
e) $|\,\vec{A} \times \vec{B}\,| = (48^2)^{1/2} = 48$

6.1.- Proyección de un vector A sobre otro B.

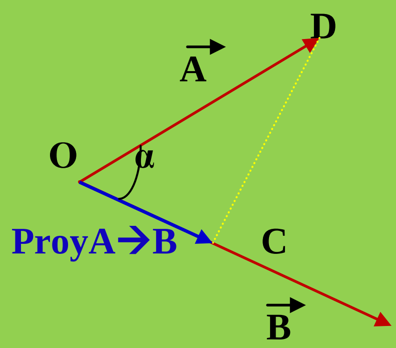
Video: Producto Escalar de dos vectores y proyección de un vector sobre otro (determinación del ángulo entre dos vectores
http://www.youtube.com/watch?v=-r84u5OQPME

Dados los vectores $\vec{A}$ = Ax i + Ay j + Az k y $\vec{B}$ = Bx i + By j + Bz k

Nos basaremos en el siguiente gráfico:

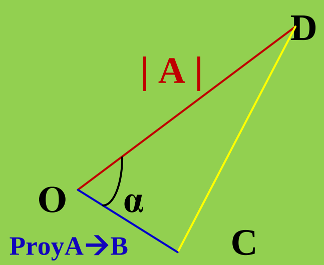


Vamos a determinar la proyección de A sobre B. Para ello desde el extremo del vector A buscamos perpendicularmente el vector B:



Si trabajamos con módulos se constituye un triángulo rectángulo $\widehat{OCD}$.

En este triángulo se cumple:



cos α = cateto contiguo/hipotenusa
cos α = ProyA→B/ | A |

ProyA →B = | A | . cos α

Recordar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

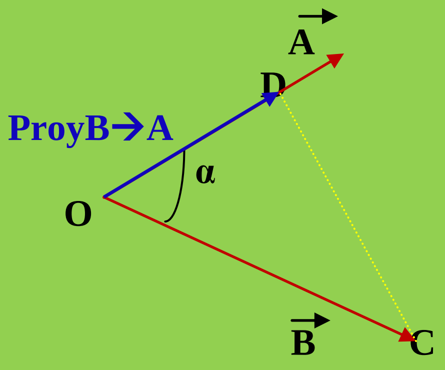
Por la propiedad conmutativa:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot \underbrace{A \cos\alpha}_{\text{Proy}A \rightarrow B}$$

luego:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot \text{Proy}A \rightarrow B \quad ; \quad \boxed{\text{Proy}A \rightarrow B = \vec{A} \cdot \vec{B} / B}$$

Partiendo del gráfico inicial vamos a calcular la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$:



Según el triángulo rectángulo anterior:

$$\cos\alpha = \text{Proy}B \rightarrow A / B \quad ; \quad \boxed{\text{Proy}B \rightarrow A = B \cdot \cos\alpha}$$

Recordemos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \underbrace{B \cdot \cos\alpha}_{\text{Proy}B \rightarrow A}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \text{Proy}B \rightarrow A \quad ; \quad \boxed{\text{Proy}B \rightarrow A = \vec{A} \cdot \vec{B} / A}$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k y $\vec{B}$ = 6 i – 3 j +2 k, calcular:

a) **El ángulo que forman los dos vectores.**
b) **Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$.**
c) **Gráfica y numéricamente la proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.**

Resolución

a) **Datos necesarios:**

$A = [\,3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$

$B = [\,6^2 + (-3)^2 + 2^2]^{1/2} = 49^{1/2} = 7$

Recordemos que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz$$

luego: $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k y $\vec{B}$ = 6 i – 3 j +2 k

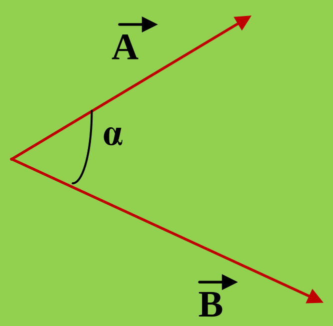
$$A \cdot B \cdot \cos\alpha = AxBx + AyBy + AzBz$$

$$3{,}74 \cdot 7 \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2$$

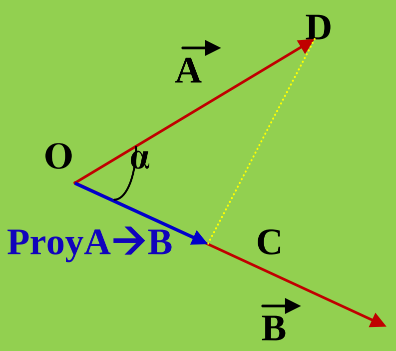
$$26{,}18 \cos\alpha = 18 - 6 - 2 \;;\; 26{,}18 \cos\alpha = 10 \;;\; \cos\alpha = 10 / 26{,}18$$

$$\cos\alpha = 0{,}3819 \rightarrow \alpha = 67{,}54^o$$

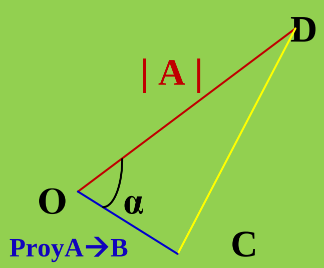
b) $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k y $\vec{B}$ = 6 i – 3 j +2 k



Vamos a determinar la proyección de A sobre B. Para ello desde el extremo del vector A buscamos perpendicularmente el vector B:



Si trabajamos con módulos se constituye un triángulo rectángulo $\widehat{OCD}$. En este triángulo se cumple:



cos α = cateto contiguo/hipotenusa

cos α = ProyA→B/ | A |

$$\boxed{Proy_{A\rightarrow B} = |A| \cdot \cos\alpha}$$

Recordar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

Por la propiedad conmutativa:

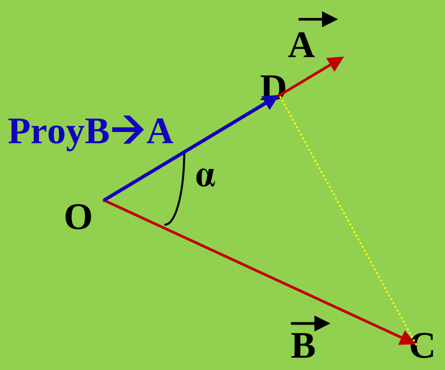
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot \underbrace{A \cos\alpha}_{Proy_{A\rightarrow B}}$$

luego:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = B \cdot \text{ProyA}\rightarrow\text{B}$; $\boxed{\text{ProyA}\rightarrow\text{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} / B}$

$\text{ProyA}\rightarrow\text{B} = 10/\ 7 = 1{,}42$

c)



Según el triángulo rectángulo anterior:

$\cos\alpha = \text{ProyB}\rightarrow\text{A} / B$; $\boxed{\text{ProyB}\rightarrow\text{A} = B \cdot \cos\alpha}$

Recordemos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \underbrace{B \cdot \cos\alpha}_{\text{ProyB}\rightarrow\text{A}}$$

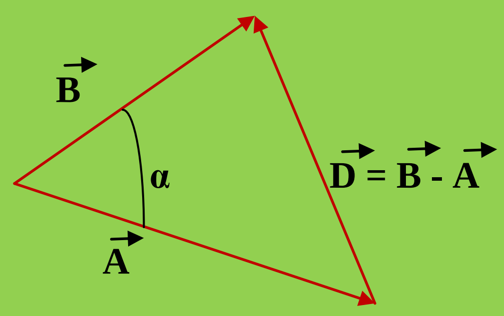
$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot \text{ProyB}\rightarrow\text{A}$; $\boxed{\text{ProyB}\rightarrow\text{A} = \vec{A} \cdot \vec{B} / A}$

PtoyB→A = 10/ 3,74 = *2,67*

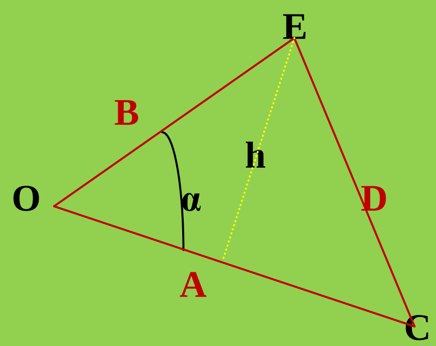
6.2.- Cálculo del Área de un triángulo.

Video: Área de un triángulo
http://www.youtube.com/watch?v=FNztUeuM4BQ&playnext=1&list=PL5F507C2B6B6B1B1D&feature=results_video

El esquema de vectores siguiente es conocido por nosotros:



Se trata de una diferencia de dos vectores. Si trabajamos con los módulos de los vectores:



Intentamos calcular el área del triángulo y recordemos:

Área del triángulo = ½ . base . altura (1)

base = B
altura = h
sen α = cateto opuesto / hipotenusa
sen α = h / B ; $\boxed{h = B \cdot \text{sen } \alpha}$ (2)

Llevamos la ecuación (2) a la ecuación (1):

Área del triángulo = ½ . A . B . sen α (3)

Recordemos:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = A \cdot B \cdot \text{sen}\, \alpha$$

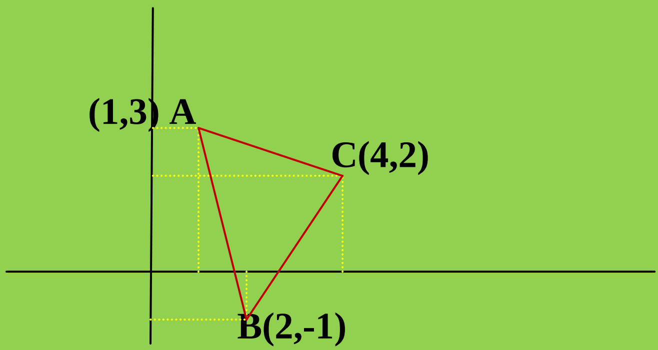
Módulo del producto vectorial de dos vectores que llevaremos a la ecuación (3):

$$\boxed{\text{Área del triángulo} = \tfrac{1}{2}\, |\vec{A} \times \vec{B}|}$$

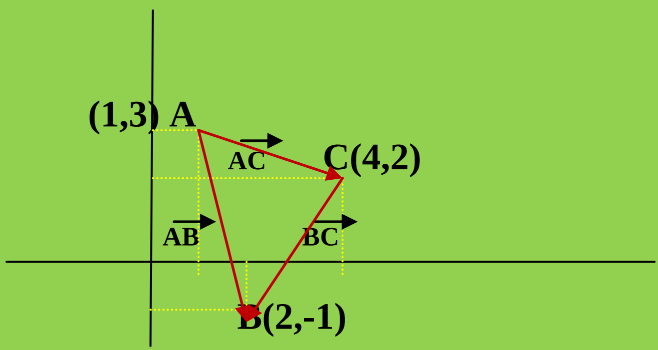
Ejercicio resuelto (Fuente Enunciado: Dpto de F/Q del I.E.S. Agular y Cano. Resolución: A. Zaragoza)

Calcula el perímetro, uno de sus ángulo y el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A(1,3); B(2,-1) y C(4,2)

Resolución



Para conocer el perímetro transformaremos los lados del triángulo en vectores. Los *módulos de dichos vectores serán la longitud del lado correspondiente*. Como el ejercicio nos pide el ángulo que forman dos vectores tendremos presente que nosotros sabemos conocer ángulos entre vectores que tienen un origen común Vectores a determinar:



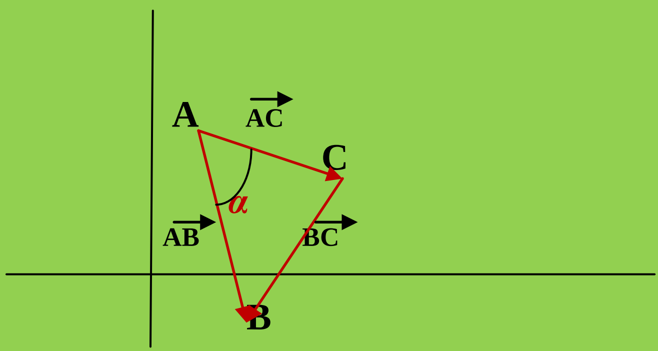
$\vec{AC} = [\,(4 - 1)\,,\,(2 - 3)\,] \rightarrow \vec{AC}\,(3, -1) \rightarrow \vec{AC} = 3\,i - j$
$\vec{CB} = [\,(2 - 4)\,,\,(-1 - 2)\,] \rightarrow \vec{CB}\,(-2, -3) \rightarrow \vec{CB} = -2\,i - 3\,j$
$\vec{AB} = [\,(2 - 1)\,,\,(-1 - 3)] \rightarrow \vec{AB}\,(1, -4) \rightarrow \vec{AB} = i - 4\,j$

$AC = [\,3^2 + (-1)^2]^{1/2} = 10^{1/2} = 3{,}16$
$CB = [\,(-2)^2 + (-3)^2]^{1/2} = 13^{1/2} = 3{,}6$
$AB = [\,(-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 17^{1/2} = 4{,}12$

Perímetro:

Perímetro $= \overline{AC} + \overline{CB} + \overline{AB} = 3{,}16 + 3{,}6 + 4{,}12 = 10{,}88\ udl$

Uno de sus ángulos:



Recordemos:

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\cdot AC\cdot\cos\alpha$
$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB_xAC_x + AB_yAC_y + AB_zAC_z$

$AB\cdot AC\cdot\cos\alpha = AB_xAC_x + AB_yAC_y + AB_zAC_z$

$4{,}12\cdot 3{,}16\cdot\cos\alpha = 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-1)$

$13{,}02\cdot\cos\alpha = 7\ ;\ \cos\alpha = 7 / 13{,}02 = 0{,}537$

$\alpha = 57{,}52^o$

Área del triángulo:

Área del triángulo $= ½\,|\,\vec{AB} \times \vec{AC}\,|$

Área del triángulo = ½ . AB . AC . sen α

AB = 4,12
AC = 3,16
sen 57,52^o = 0,84

Área del triángulo **= ½ . 4,12 . 3,16 . 0,84 =** ***5,46*** **uds**

Ejercicio resuelto (Fuente Enunciado: d . Raúl González Medina. Resolución: A. Zaragoza)
Comprobar que los vectores $\vec{A}$ = 3 i + 2 j – k; $\vec{B}$ = i + 3 j – 5 k y $\vec{C}$ = 2 i – j + 4 k forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Para comprobarlo tendremos que determinar que uno de los ángulos del triángulo es de 90^o.

Aplicando las ecuaciones del producto escalar podremos resolver el ejercicio.

Datos necesarios:

$A = [\, 3^2 + 2^2 + (-1)^2]^{1/2} = 14^{1/2} = 3{,}74$
$B = [\, 1^2 + 3^2 + (-5)^2]^{1/2} = 35^{1/2} = 5{,}91$
$C = [\, 2^2 + (-1)^2 + 4^2]^{1/2} = 21^{1/2} = 4{,}58$

Veamos el ángulo que forma $\vec{A}$ con $\vec{B}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\alpha \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = AxBx + AyBy + AzBz \end{array}\right\}$$

$$A \cdot B \cdot \cos\alpha = AxBx + AyBy + AzBz$$

$$3{,}74 \cdot 5{,}91 \cdot \cos\alpha = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-5)$$

$$22{,}1 \cos\alpha = 14 \quad ; \quad \cos\alpha = 14 / 22{,}1 = 0{,}63$$

$$\alpha = 50{,}95^o$$

Ángulo entre A y C:

C = 4,58

$$A \cdot C = AxCx + AyCy + AzBz$$

$$3{,}74 \cdot 4{,}58 \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4$$

$$17{,}12 \cos \alpha = 6 - 2 - 4 \;\; ; \;\; 17{,}12 \cos \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 0 / 17{,}12 = 0 \rightarrow \alpha = 90^{o}$$

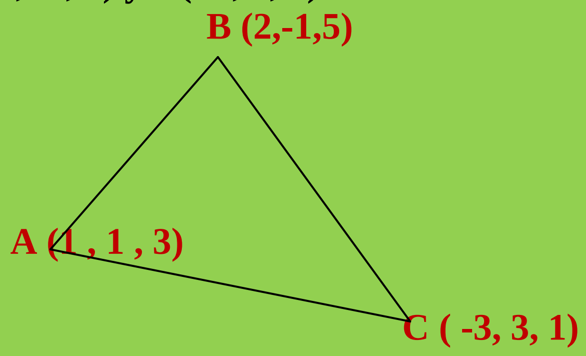
Se ha demostrado la existencia del ángulo de 90º por lo que el ejercicio está terminado.

Ejercicio resuelto

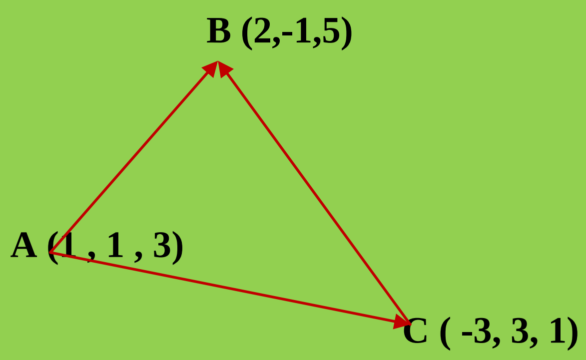
Determinar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).

Resolución

A(1, 1, 5) , B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).



Si pasamos al diagrama de vectores:



Área del triángulo = ½ | $\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{AC}$ |

$\overrightarrow{AB}$ = [(2 – 1) , [(-1) – 1], (5 – 3)] ; $\overrightarrow{AB}$ = i – 2 j + 2 k
$\overrightarrow{AC}$ = [(-3 – 1) , (3 – 1) , (1 – 3)] ; $\overrightarrow{AC}$ = -4 i + 2 j - 2 k

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & +2 & -2 \\ i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = 4\,i + 2\,k - 8\,j - ([(-2).(-4)\,k] + 4\,i - 2\,j) = \\ = 4\,i + 2\,k - 8\,j - 8\,k - 4\,i + 2\,j = \\ = -\,6\,j - 6\,k \end{array}$$

Área del triángulo = ½ | AB x AC |

| $\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{AC}$ | = $[(-6)^2 + (-6)^2]^{1/2} = 72^{1/2} = 8{,}84$

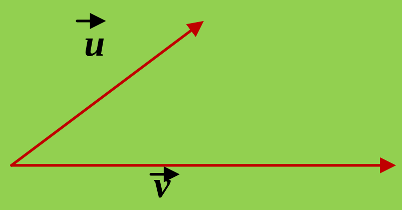
Área = ½ . 8,84 = *4,42 u^2.*

Ejercicio resuelto

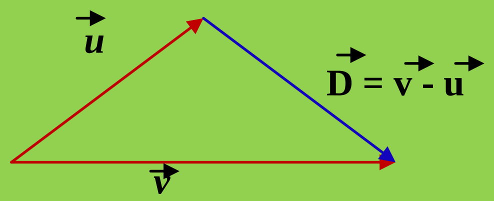
Conociendo los vectores $\vec{u}$ (1, 1, 3) y $\vec{v}$ (3, 3, 2) halla el área del triángulo que determinan:

Resolución

Dos vectores no determinan un triángulo pero la diferencia entre esos dos vectores si lo determinan:



En este diagrama nos falta un vector y por lo tanto un lado del triángulo. Al realizar la diferencia $\vec{v} - \vec{u}$ obtenemos el tercer vector:



Los módulos de los vectores equivalen a las longitudes de los lados del triángulo.

Área del triángulo = ½ $|\vec{u} \times \vec{v}|$

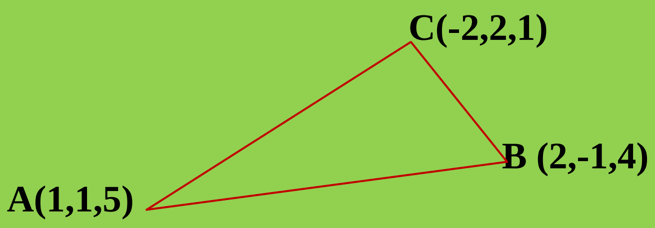
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\,i + 9\,j + 3\,k - 3\,k - 9\,i - 2\,j = -7\,i + 7\,j$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = [(-7)^2 + 7^2]^{1/2} = 9{,}89$$

$$\text{Área} = ½\,|\vec{u} \times \vec{v}| = ½ \,.\, 9{,}89 = 4{,}94\ u^2$$

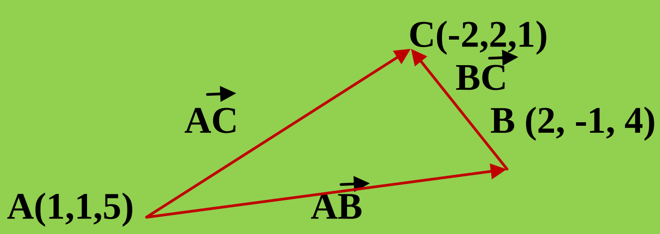
Ejercicio resuelto

Un triángulo tiene sus vértices en los puntos que se indican en la figura siguiente:



Área del triángulo = ½ $|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Podemos establecer los vectores:



$\overrightarrow{AC}$ [(-2) – 1) , (2 – 1) , (1 – 5)] → $\overrightarrow{AC}$ (-3, 1, -4)
$\overrightarrow{AB}$ [(2 – 1) , (-1) – 1) , (4 – 5)] → $\overrightarrow{AB}$ (1 , -2, -1)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 8\,i + 3\,j + k - 6\,k + 4\,j + i = 9\,i + 7\,j - 5\,k$$

$$|\,\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,| = [\,9^2 + 7^2 + (-5)^2]^{1/2} = 155^{1/2} = 12{,}44$$

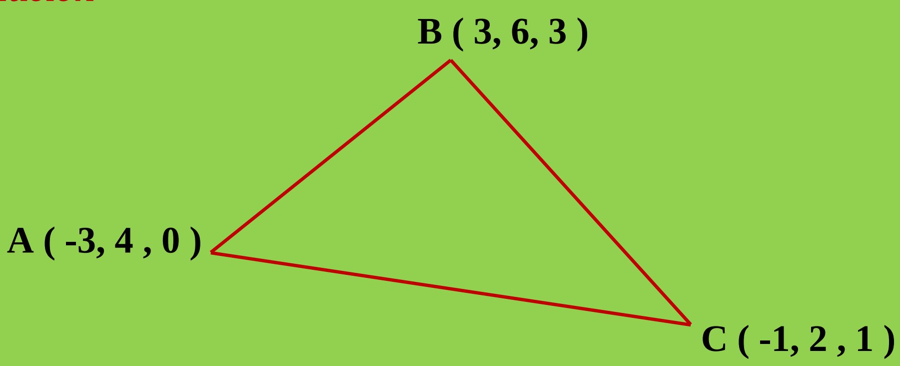
Área = ½ . 12,44 = ***6,22 u²***

Ejercicio resuelto

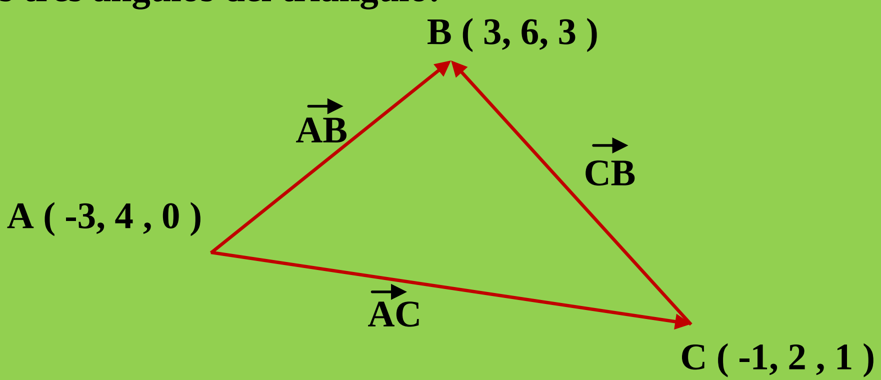
Sean A (- 3, 4, 0) ; B (3, 6, 3) y C (- 1, 2, 1) los tres vértices de un triángulo. Se pide:

a) El coseno de cada uno de los ángulos del triángulo.
b) Área del triángulo.

Resolución



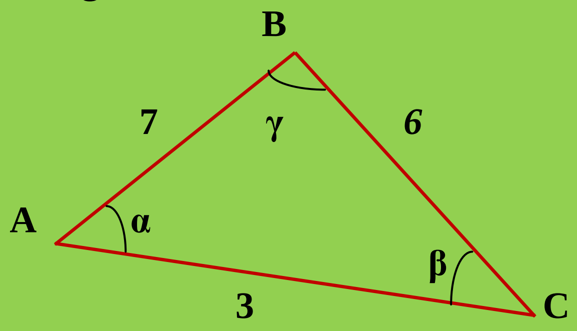
Calcularemos los vectores correspondientes a cada uno de los lados del triángulo, sus módulos y aplicando el teorema del coseno, los cosenos de los tres ángulos del triángulo:



$\overrightarrow{AB}$ [(3 – (- 3)) , (6 – 4) , (3 – 0)] → $\overrightarrow{AB}$ (6 , 2 , 3)
$\overrightarrow{AC}$ [(- 1 – (- 3)) , (2 – 4) , (1 – 0)] → $\overrightarrow{AC}$ (2 , -2, 1)
$\overrightarrow{CB}$ [(3 – (- 1)) , (6 – 2) , (3 – 1)] → $\overrightarrow{CB}$ (4 , 4, 2)

$|\overrightarrow{AB}| = (6^2 + 2^2 + 3^2)^{1/2} = 49^{1/2} = 7$
$|\overrightarrow{AC}| = [(2^2 + (-2)^2 + 1^2]^{1/2} = 9^{1/2} = 3$
$|\overrightarrow{CB}| = (4^2 + 4^2 + 2^2)^{1/2} = 36^{1/2} = 6$

Si volvemos al triángulo inicial:



Los valores de los lados no corresponden con la longitud pintada. Pero los consideramos como válidos y podemos seguir trabajando.

Teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 – 2 . b . c . \cos α$; $6^2 = 3^2 + 7^2 – 2 . 3 . 7 . \cos α$

$36 = 9 + 49 – 42 . \cos α$; $- 19 = - 42 \cos α$; $\cos α = -19 /-42 = 0,45$
$b^2 = a^2 + c^2 – 2 . a . c . \cos γ$; $3^2 = 6^2 + 7^2 – 2 . 6 . 7 . \cos γ$

$9 – 36 – 49 = - 84 \cos γ$; $-76 = - 84 \cos γ$; $\cos γ = -76 / - 84$

$\cos γ = 0,9 → γ = 25,84^o$

$c^2 = a^2 + b^2 – 2 . a . b . \cos β$; $7^2 = 6^2 + 3^2 – 2 . 6 . 3 . \cos β$

$49 – 36 – 9 = - 36 \cos β$; $4 = - 36 \cos β$; $\cos β = 4 / - 36 = - 0,11$

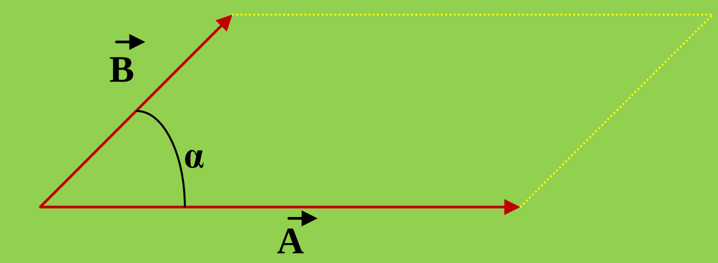
$β = 96,37^o$

Área del triángulo = $| \overrightarrow{AC} | . | \overrightarrow{AB} | . \cos α = 3 . 7 . 0,45 = 9,45\ u^2$

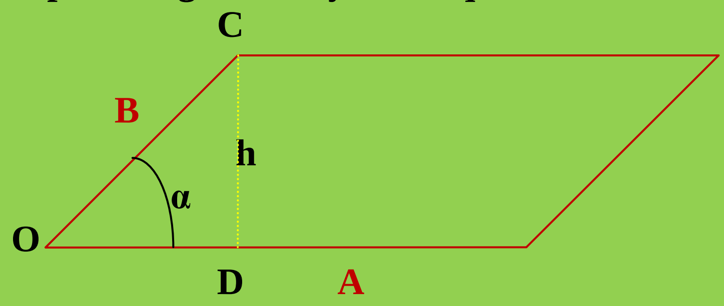
6.3.- Cálculo del Área de un paralelogramo.

Video: Área del paralelogramo
http://www.youtube.com/watch?v=vMDskjMJ3F4&playnext=1&list=PL5F507C2B6B6B1B1D&feature=results_video

Dado dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman entre ellos un ángulo *"α"* podemos construir el siguiente diagrama de vectores:



Obtenemos un paralelogramo cuya área queremos conocer



Área del paralelogramo = base . altura (1)

base = A
altura = h

Del triángulo rectángulo $\widehat{ODC}$:

sen α = h / B ; h = B . sen α (2)

Llevamos la ecuación (2) a la ecuación (1):

Área del paralelogramo = A . B sen α = | $\vec{A} \times \vec{B}$ |

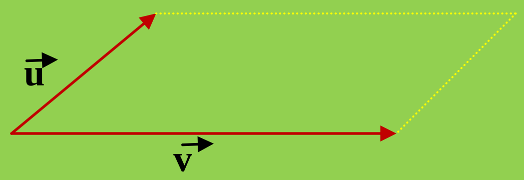
Luego:

$$\boxed{\text{Área del paralelogramo} = |\vec{A} \times \vec{B}|}$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ = (3, 1, -1) y $\vec{v}$ (2, 3, 4), hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores u y v.

Resolución



Área del paralelogramo = $|\vec{u} \times \vec{v}|$

u = (3, 1, -1) y v (2, 3, 4)

$$\mathbf{u \times v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4\,i + 9\,k - 2\,j - (2\,k - 3\,i + 12\,j) =$$
$$= 4\,i + 9\,k - 2\,j - 2\,k + 3i - 12\,j =$$
$$= 7\,i - 14\,j + 7\,k$$

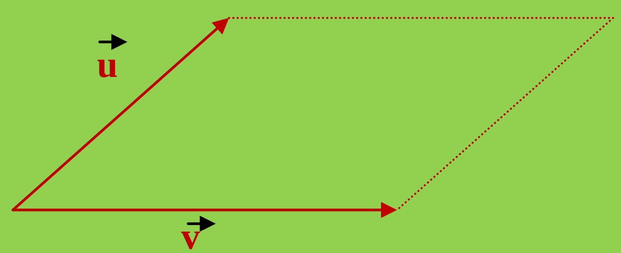
$|\vec{u} \times \vec{v}| = [\,7^2 + (-14)^2 + 7^2]^{1/2} = 294^{1/2} = 17{,}14$

Área del paralelogramo = *17,14 u²*

Problema Resuelto

Calcula el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ (2, 3, 4) y $\vec{v}$ (3, 1, 2)

Resolución



Área del paralelogramo = | u x v |

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\,i + 2\,k + 12\,j - (9\,k + 4\,j + 4\,i) =$$

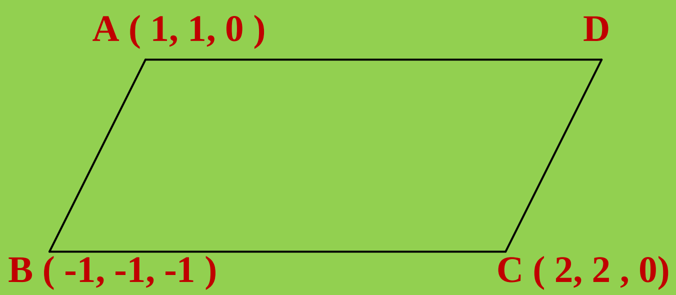
$$= 2\,i + 8\,j - 7k$$

$$|\,u \times v\,| = [\,2^2 + 8^2 + (-7)^2]^{1/2} = 117^{1/2} = \mathit{10{,}81\ u^2}$$

Área = ***10,81 u²***

Ejercicio resuelto

Considerar la siguiente figura:

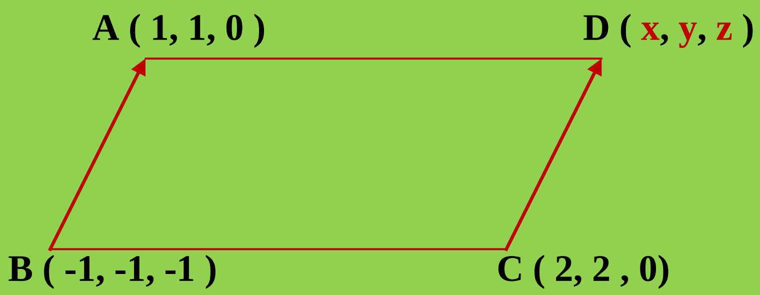


Se pide:

a) **Coordenadas de D para qué ABCD sea un paralelogramo**
b) **Área del paralelogramo.**

Resolución

a) **Para que ABCD sea un paralelogramo es necesario que los lados BA y CD sean paralelos y tengan la misma longitud. O bien que los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equipolentes, es decir, tengan las mismas componentes y por lo tanto el mismo módulo. El dibujo inicial lo podemos transformar en:**



Componentes vector BA:

$\overrightarrow{BA}$ [(1 – (- 1)) , (1 – (-1)) , (0 – (-1))]

$\overrightarrow{BA}$ (2 , 2 , 1)

Componentes del vector $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{CD}$ [(x – 2) , (y – 2) , (z – 0)]

Como | $\overrightarrow{BA}$| = | $\overrightarrow{CD}$ | se cumplirá:

x – 2 = 2 ; *x* = *4*

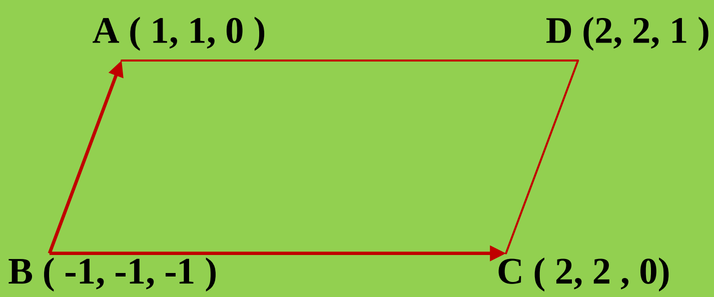
y – 2 = 2 ; *y* = *4*

z – 0 = 1 ; *z = 1*

Las coordenadas del punto D son (4, 4, 1)

b) El Área del paralelogramo.

Trabajaremos con el dibujo inicial:



$\overrightarrow{BA}$ (2, 2, 1)

$\overrightarrow{BC}$ (3, 0, 1)

Área del paralelogramo = | BA x BC |

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,i + 3\,j - (6\,k + 2\,j) = 2\,i + j - 6\,k$$

$$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = [\,2^2 + 1^2 + (-6)^2]^{1/2} = 41^{1/2} = 6{,}4$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

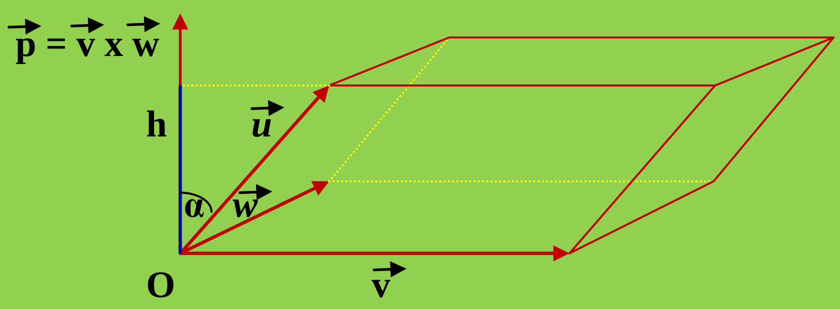
Área del paralelogramos = *6,4 u²*

6.4.- Cálculo del volumen de un paralelepípedo. Producto Mixto de tres vectores.

Video: Volumen del paralelepípedo. Producto mixto de tres vectores
http://www.youtube.com/watch?v=DgN8AYnGFU4

Producto mixto de tres vectores

Con los vectores $\vec{u}$ (u_x, u_y, u_z); $\vec{v}$ (v_x, v_y, v_z) y $\vec{w}$ (w_x, w_y, w_z) vamos a constituir el armazón de un paralelepípedo realizando una disposición de dichos vectores:



Explicaremos el dibujo anterior:

a) **Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ determinan la *base* del paralelepípedo.**
b) **El vector $\vec{p}$ es el producto vectorial de $\vec{v} \times \vec{w}$.**
c) ***h* es la *proyección del vector $\vec{u}$* sobre el vector $\vec{p}$.**
d) ***α* es el ángulo que forman $\vec{u}$ con $\vec{v} \times \vec{w}$**

Si queremos determinar el *volumen del paralelepípedo* recordemos su fórmula:

$$\boxed{\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{la altura}} \qquad (1)$$

La base es el paralelogramo constituido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y su Área viene determinada pos la ecuación:

$$\text{Área de la Base} = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

En lo referente a la atura en el dibujo se puede apreciar la existencia de un *triángulo rectángulo* constituido por el módulo de $\vec{u}$, la h y el trazo amarillo que produce la proyección de u sobre p. Entre h y el módulo de u existe un ángulo α. Según este triángulo:

$$\cos \alpha = h / |\vec{u}| \quad ; \quad \boxed{h = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha}$$

Si nos vamos a la ecuación del volumen del paralelepípedo (1)¨

$$\text{Volumen} = |v \times w| \cdot |u| \cdot \cos \alpha$$

Analicemos el miembro de la derecha de la ecuación anterior:

$$\text{Volumen} = \underbrace{|v \times w|}_{\text{módulo de un vector}} \cdot \underbrace{|u|}_{\text{módulo de un vector}} \cdot \cos \alpha = \textit{UN ESCALAR}$$

Podemos afirmar que el volumen de un paralelepípedo *ES UN ESCALAR* que se conoce como *PRODUCTO MIXTO DE TRES VECORES:*

$$\textit{Volumen del paralelepípedo} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

El producto mixto de tres vectores se puede obtener por el cálculo matricial:

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

Llegamos a la conclusión de que el *PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES* se trata del *producto escalar de uno de ellos por el producto vectorial de los otros dos*, obteniendo un resultado numérico como el *procedente del cálculo del volumen de un paralelepípedo*.

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ los vectores. El producto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es el *producto mixto de tres vectores*.

Podemos establecer:

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})}$$

En realidad, estamos multiplicando *escalarmente*, *un vector* por el *producto vectorial de dos vectores*, que sería como decir: *multiplicamos el área de la base por la altura que equivale al volumen de un paralelepípedo*.

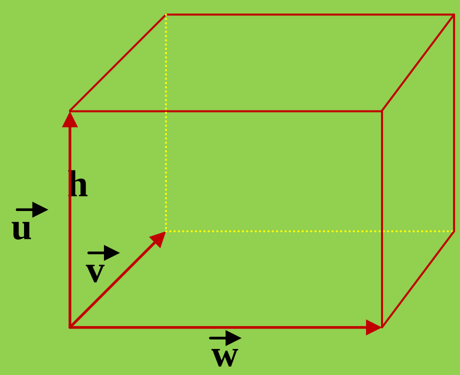
$$\boxed{\text{Volumen del paralelepípedo} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores $\vec{u}$ (1,3,5) ; $\vec{v}$ (2, -1,4) y $\vec{w}$ (2, 4 , 3), determinar el volumen del paralelepípedo que constituyen.

Resolución

Dibujamos la figura y colocamos los vectores:



Volumen del paralelepípedo = Área de la base x la atura =

$$= |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Área de la base = $|\vec{v} \times \vec{w}|$

Altura = h = $|\vec{u}|$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 24 + 40 + 10 - 18 - 16 = 37\ u^3$$

Volumen del paralelepípedo = ***37 u³***

Ejercicio resuelto

El volumen de un ortoedro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura. Sabiendo que los vectores que forman la base corresponden a $\vec{v}$ (2, -1, 4) y $\vec{w}$ (2, 4, 3) y las componentes de de la altura son $\vec{u}$ (1, 3, 5). ¿Cuál es el valor del volumen del ortoedro?.

Resolución:

$$\textit{Volumen del ortoedro} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 + 24 + 40 - (-10 + 18 + 16) = 61 - 24 = 37\ u^3$$

Ejercicio resuelto

Tenemos tres vectores cuyas componentes son:

$$\vec{u}\,(2, -1, 1)\ ;\ \vec{v}\,(3, -2, 5)\ \text{y}\ \vec{w}\,(3, 5, 1)$$

Responde, tras comprobar, si el valor escalar de $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ es igual a $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ y a $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$.

Resolución

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -4-15+15-(-6-3+50) = -45$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15-4-15-(50-6-3) = -45$$

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -15+15-4-(-3+50-6) = -45$$

Ejercicio resuelto

Dados los vectores:

$$\vec{u}(2, 1, 3)\ ;\ \vec{v}(1, 2, 3)\ \ y\ \ \vec{w}(-1, -1, 0)$$

Hallar el *producto mixto* [$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$]. ¿Cuánto vale el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los vectores dados.

Resolución

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3-3-(-6-6) = -6+12 = 6\ u^3$$

7.- Momento de un Vector respecto a un punto. Teorema de Varignon.

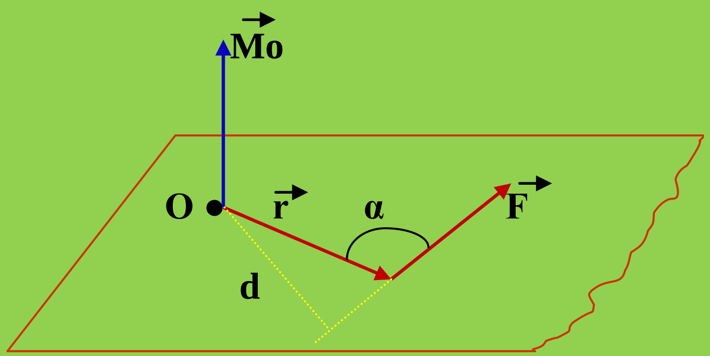
Momento de un vector respecto a un punto

http://fisicayquimicaenflash.es/Vectores/vector06.htm

Momento de un vector respecto a un punto

Nos encontramos con el problema de desenroscar una tuerca de un tornillo. El tiempo ha oxidado la tuerca y el tornillo y el proceso se nos hace difícil. La solución del problema consiste en *hacer girar la tuerca* y para ello utilizamos líquidos lubricantes para ayudarnos en nuestra labor. Quiero que os fijéis en lo que he dicho anteriormente *" La solución del problema consiste en hacer girar la tuerca"*. *TENEMOS QUE HACER QUE UN CUERPO GIRE.*

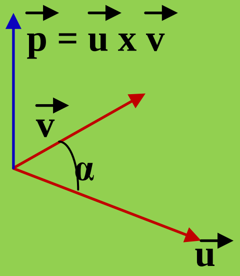
Supongamos que la tuerca se encuentra en el plano y vamos a utilizar una fuerza (magnitud vectorial). Consideramos la tuerca como un punto.



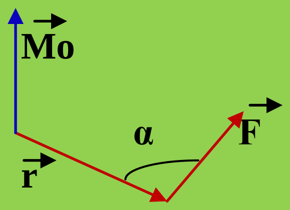
El Momento de un vector $\vec{F}$ respecto a un punto, O, se define como el producto vectorial del vector $\vec{r}$ x $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

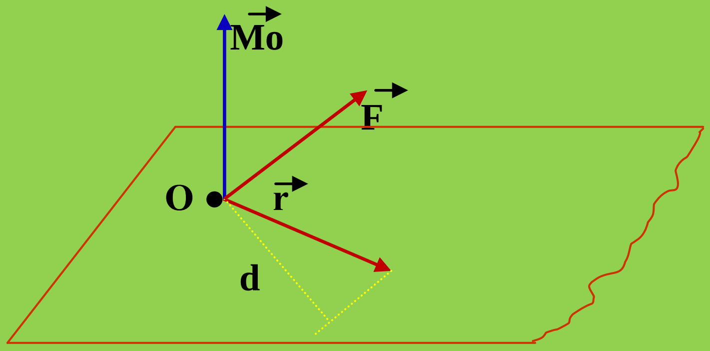
La primera objeción que podéis realizar es saber *como se ha producido el producto vectorial*. Vosotros lo conocéis de la forma:



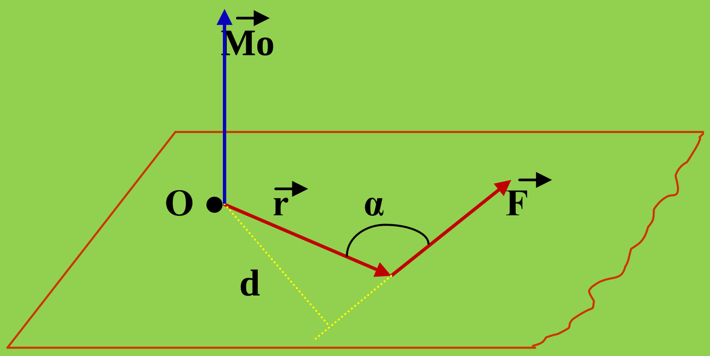
Y en esta nueva situación los vectores nos vienen de la forma:



El problema lo resolvemos recordando la Equipolencia de vectores. *Vectores equipolentes* son aquellos que tienen la *misma dirección*, *sentido* y *mismo módulo* pero distinto *punto de aplicación*. Por una simple traslación del vector $\vec{F}$ de la figura inicial podremos tener los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ en las condiciones de un producto vectorial como fue explicado:



Resuelto el problema de la posición de los vectores para producir un producto vectorial volvemos al principio del punto que estamos tratando:



El Momento (Mo) de un vector F respecto a un punto, O, se define ***como el producto vectorial del vector*** ***$\vec{r}$ x $\vec{F}$*****:**

$$\boxed{\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

.- $\vec{r}$ es el vector posición que determina el punto de aplicación del vector $\vec{F}$.

.- $\vec{F}$, en nuestro caso, es el vector fuerza que estamos aplicando.

Las características del vector Momento, $\vec{Mo}$, las podemos establecer en:

a) **Se trata de un vector *LIBRE*.**

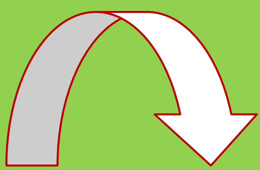
b) **Su módulo viene determinado por la ecuación:**

$$\boxed{|\vec{Mo}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}\ \alpha}$$

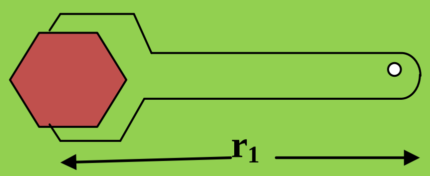
c) **Su dirección es *perpendicular* al plano en donde se encuentran los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.**

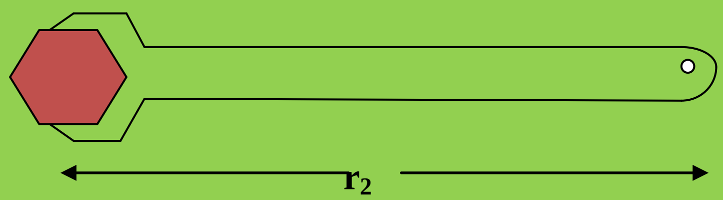
d) **Su *sentido* viene determinado por el *avance del tornillo que gira en el mismo sentido que el vector F* (recordar las reglas que se establecieron para determinar el sentido de un vector producto vectorial).**

Video: Momento de una fuerza respecto a un punto
http://www.youtube.com/watch?v=a91wFb4DhVc



Veamos si hemos comprendido el concepto del *vector Momento*. Teníamos una tuerca que destornillar. Tenemos un vector que la hace girar. Nos vamos a olvidar de los lubricantes y vamos a utilizar la fuerza bruta. Tenemos dos llaves inglesas para destornillar la tuerca, una más larga que la otra:



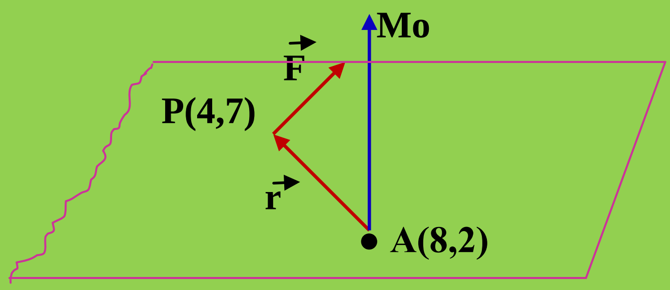


¿Cuál de ellas utilizaréis?

La de longitud r_2 (la más larga) puesto que aumenta el módulo de $|\vec{r}|$ y el módulo del vector Momento, $|\vec{Mo}|$, se hace mayor y girará con *mayor velocidad* que en nuestro caso se traduce en *desenroscar más fácilmente*.

Ejercicio resuelto (**Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. Aguilar y Cano. Resolución: A. Zaragoza**)

El vector $\vec{F}$ = 2 i + j tiene su punto de aplicación en el punto P(4,7). Determina el momento de F respecto del punto A(8,2).



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(4 – 8) , (7 – 2)] → $\vec{r}$ (-4, 5)

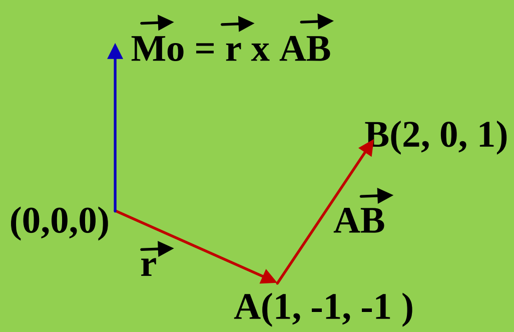
El momento de F : $\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4\,k - (10\,k) = -14\,k$$

Ejercicio resuelto (**Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. Aguilar y Cano. Resolución: A. Zaragoza**)

Calcula el momento del vector AB, definido por A (1, -1, -1) y B (2, 0 , 1), respecto al origen de coordenadas.

Resolución



Componentes del vector $\vec{r}$ **:**

$\vec{r}\,[\,(1-0)\,,\,(-1-0)\,,\,(-1-0)\,] \rightarrow \vec{r}\,(1, -1, -1)$

Componentes del vector $\vec{AB}$**:**

$\vec{AB}\,[\,(2-1)\,,\,(0-(-1))\,,\,(1-(-1))\,] \rightarrow \vec{AB}\,(1, 1, 2)$

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,i - j + k - (-k + 2\,j - i) = -i - 3\,j + 2\,k$$

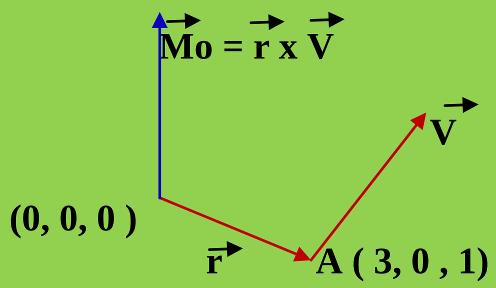
Ejercicio resuelto (**Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)**

El vector $\vec{V}$ **(2, 1, 0) tiene su punto de aplicación en A (3, 0, 1), calcula:**

a) **El momento de** $\vec{V}$ **respecto del origen de coordenadas.**
b) **El momento de** $\vec{V}$ **respecto del punto b (3, -2, -1)**

Resolución

a) **El punto A es el punto extremo del vector r**



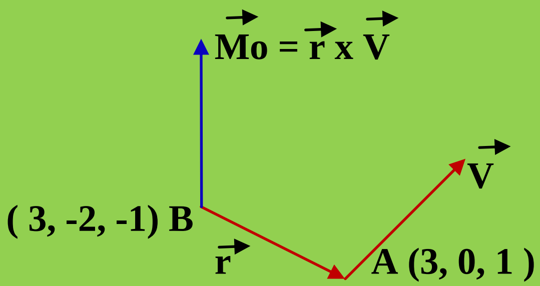
Componentes del vector r :

$\vec{r}$ **[(3 – 0) , (0 – 0) , (1 – 0)] →** $\vec{r}$ **(3, 0, 1)**

El vector Mo con respecto al origen de coordenadas:

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,i + 2\,j + 3\,k$$

b) **El momento respecto al punto B (3, -2 , -1)**



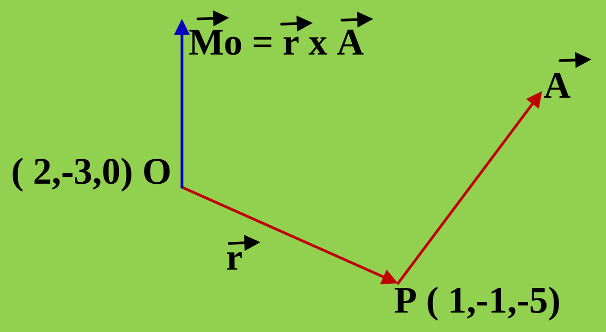
Componentes vector r:

$\vec{r}$ **[(3 – 3) , (0 – (-2)) , (1 – (-1))] →** $\vec{r}$ **(0, 2, 2)**

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,j - (\,4\,k + 2\,i\,) = -\,2\,i + 4\,j - 4\,k$$

Ejercicio resuelto (Fuente Enunciado: Dpto. de F/Q del IES. Ruiz Gijón. Resolución: A. Zaragoza)

Dado el vector $\vec{A}$ = j – 3 k aplicado en el punto P (1, -1, -5), halla su momento respecto del punto O (2, -3, 0).



Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(1 – 2) , ((-1) – (-3)) , ((-5) – 0)] → $\vec{r}$ (-1, 2, -5)

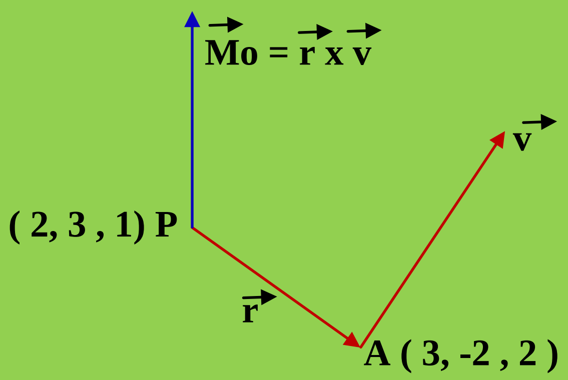
$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6\,i - k - (3\,j - 5\,i) = -i - 3\,j - k$$

Ejercicio resuelto (Fuente Enunciado: Dpto F/Q del I.E.S. Aguilar y Cano. Resolución: A. Zaragoza)

Sabiendo que el vector $\vec{r}$ (3, -2 , 2) es el vector de posición del vector $\vec{v}$ (5 , -1 , 2), referido al punto (0, 0 , 0). Calcular el momento del vector $\vec{v}$ respecto al punto P (2, 3, 1).

Resolución

Si el vector r está referido al punto (0, 0, 0) y las componentes de $\vec{r}$ son (3, -2 , 2), esto implica que el punto extremo de $\vec{r}$ es A (3, -2 , 2) y por lo tanto el punto de aplicación del vector $\vec{v}$, luego:



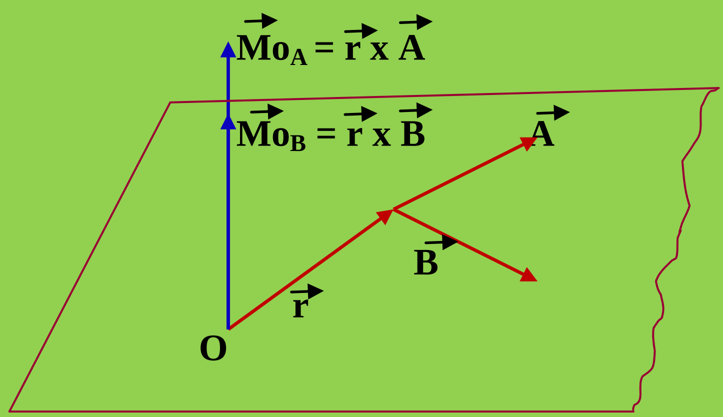
Componentes del vector $\vec{r}$:

$\vec{r}$ [(3 – 2) , ((-2) – 3) , (2 – 1)] → $\vec{r}$ (1 , - 5 , 1)

$$\vec{Mo} = \vec{r} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -10\,i + 5\,j - k - (-25\,k - i + 2\,j) = -9\,i + 3\,j + 24\,k$$

Teorema de Varignon

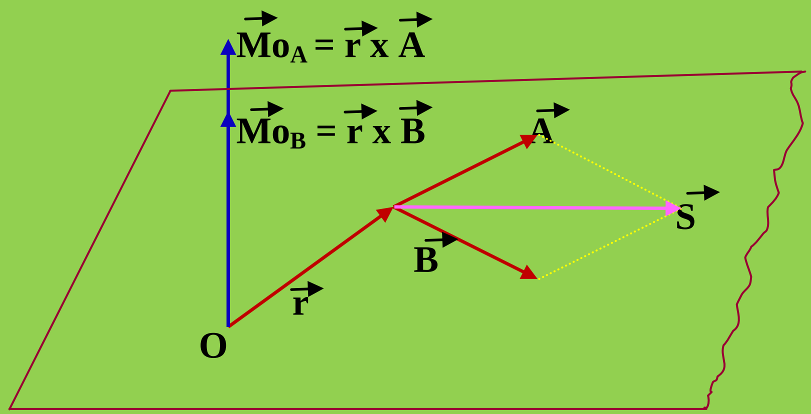
Supongamos dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, aplicados en un mismo punto y con el mismo vector de referencia respecto a un punto O. Según lo visto hasta el momento, *un vector con un vector de referencia respecto a un punto producía un Momento*, *dos vectores producirán dos momentos*.



Existirá un momento total que será:

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_A + \vec{Mo}_B = \vec{r} \times \vec{A} + \vec{r} \times \vec{B} = \vec{r} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{r} \times \vec{S}$$

Varignon **concluye:** ***El Momento, respecto de un punto, de la suma de varios vectores es igual a la suma de sus momentos, respecto al mismo punto O:***



$$\boxed{\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S}}$$

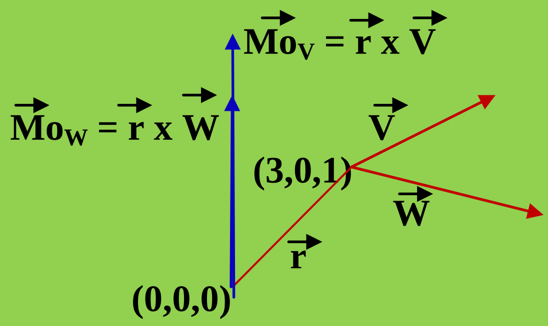
Ejercicio resuelto

El vector $\vec{V}$ (2, 1, 0) y el vector $\vec{W}$ = i – j + 3 k tienen su punto de aplicación en el punto P (3, 0, 1), calcular:

a) **El momento resultante respecto al origen de coordenadas.**
b) **El momento resultante respecto al punto B (3, -2, -1).**

Resolución

a)



Componentes del vector $\vec{r}$:

$$\vec{r}\,[\,(3-0),(0-0),(1-0)\,] \rightarrow \vec{r}\,(3, 0, 1)$$

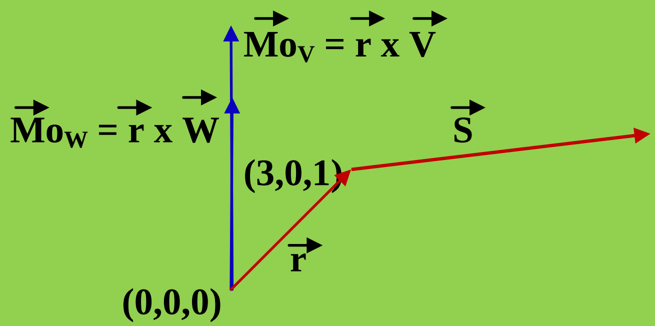
$$\vec{Mo}_V = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,j + 3\,k - (\,i\,) = -\,i + 2\,j + 3k$$

$$\vec{Mo}_W = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = j - 3\,k - (\,9\,j - i\,) = i - 8\,j - 3\,k$$

$$\vec{Mo}_T = \vec{Mo}_V + \vec{Mo}_W = (-\,i + 2\,j + 3\,k) + (\,i - 8j - 3\,k\,) =$$

$$= -\,i + 2\,j + 3\,k + i - 8\,j - 3\,k = -\,6\,j$$

Según Varignon:



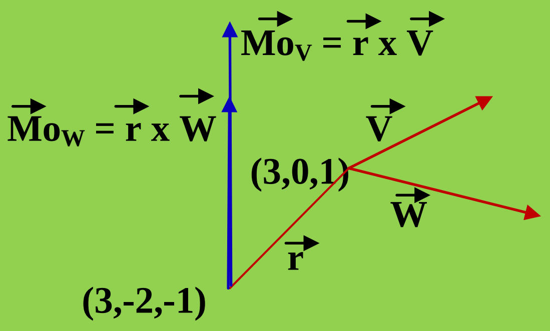
$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \qquad (1)$$

$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2\,i + j) + (i - j + 3\,k) = 3\,i + 3\,k$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo_T} = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\,j - (9\,j) = -6\,j$$

b) **Respecto al punto B (3, -2, -1):**



Componentes del vector r:

$\vec{r}\,[(3 - 3) , (0 - (-2)) , (1 - (-1))] \rightarrow \vec{r}\,(0, 2, 2)$

$$\vec{Mo_V} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\,j - (4\,k + 2\,i) = -2\,i + 4\,j - 4\,k$$

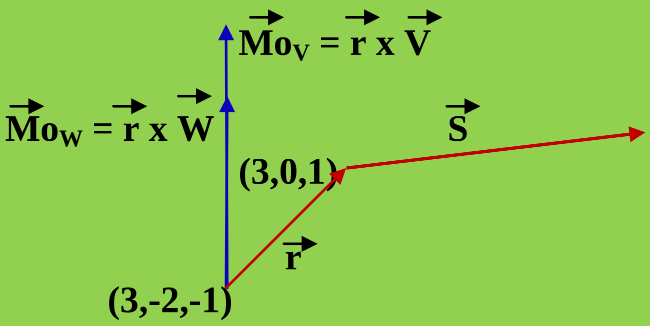
$$\vec{Mo_W} = \vec{r} \times \vec{W} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\,i + 2\,j - (2\,k - 2\,i) = 8\,i + 2\,j - 2\,k$$

$$\vec{Mo_T} = \vec{Mo_V} + \vec{Mo_W} = (-2\,i + 4\,j - 4\,k) + (8\,i + 2\,j - 2\,k) =$$

$$= -2\,i + 4\,j - 4\,k + 8\,i + 2\,j - 2\,k =$$

$$= 6\,i + 6\,j - 6\,k$$

Según Varignon:



$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} \quad (1)$$

$\vec{r}\,(0 , 2 , 2)$

$\vec{S} = \vec{V} + \vec{W} = (2\,i + j) + (i - j + 3\,k) = 3\,i + 3\,k$

Vamos a (1):

$$\vec{Mo}_T = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\,i + 6\,j - (6\,k) = 6\,i + 6\,j - 6\,k$$

------------------------------- O -----------------------------------

Se terminó

Antonio Zaragoza López