

TEMA Nº 2

CINEMÁTICA. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Video: Campeonato Fórmula 1

<https://www.youtube.com/watch?v=-yHbZWfkBwU>

En el video que hemos visto aparecen prácticamente todos los movimientos que estudia la **Cinemática**. El estudio de estos movimientos son el objetivo del tema que vamos a tratar con el siguiente contenido:

Contenido Temático

- 1.- Cinemática
- 2.- Vector Velocidad
- 3.- Vector Aceleración
 - 3.1.- Componentes Intrínsecas de la Aceleración
- 4.- Movimiento Rectilíneo y Uniforme (M.R.U.)
 - 4.1.- Estudio gráfico del M.R.U.
- 5.- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado
M.R.U.A.
- 6.- Movimiento de caída libre de los cuerpos

1.- Cinemática

La **Cinemática** comprende una rama de la **Física** que estudia el **movimiento de los cuerpos** en el **espacio**, independientemente de las **causas que lo producen**.

La aplicación de la **Cinemática** implica un conjunto de elementos tales como:

- a) **Observador**: Aplica las teorías y conceptos mediante las cuales podremos realizar el estudio del movimiento traza una partícula
- b) **Posición**: Corresponde al espacio geométrico que ocupa un cuerpo u objeto en el espacio
- c) **Trayectoria**: Es una representación de la línea que une todas las posiciones tomadas por el cuerpo
- d) **Tiempo**: Indica la duración del movimiento de un cuerpo
- e) **Rapidez y Velocidad**: es la rapidez en la que cambia de posición un móvil.

2.- Vector Velocidad.

Video: Rapidez y velocidad

<https://www.bing.com/videos/search?q=rapidez+y+velocidad&view=detail&mid=52AA93F8B1D0E145293E52AA93F8B1D0E145293E&FORM=VIRE>

Cinemática vectorial

http://www.fisicanet.com.ar/fisica/cinematica/ap02_cinematica.php

Vector posición, velocidad y aceleración

http://www.slideshare.net/moises_galarza/cinematica-vectorial-web

Video: Velocidad Instantánea

<http://www.youtube.com/watch?v=RX2oYPsEt14>

Cuando estamos viendo una carrera de Fórmula 1 y nos comunican por megafonía que Fernando Alonso ha recorrido una vuelta al circuito a una velocidad de 270 Km/h nos hablan de **Velocidad Media**, V_m , es decir, la velocidad no puede ser constante en un circuito de Fórmula 1. El mero hecho de la existencia de las curvas hacen que los pilotos **disminuyan** la velocidad antes de entrar en dicha curva. Cuando nos dicen que hemos llevado una velocidad de 270 Km/h en el recorrido del circuito nos referimos a **velocidad media**. En unos tramos hemos llevado una **velocidad superior** a los 270 Km/h y en otros una **velocidad inferior** a 270 Km/h. La velocidad de 270 Km/h la obtenemos mediante la **Media Aritmética** de todas las velocidades desarrolladas por el vehículo en el recorrido de la vuelta completa. Matemáticamente:

$$V_m = \frac{V_o + V_f}{2}$$

En donde:

V_o = Velocidad Inicial

V_f = Velocidad final

¿Y si queremos saber la velocidad que lleva la partícula en un **punto determinado** de la trayectoria?

Queremos saber cuál ha sido la velocidad del móvil al pasar por la **tribuna de espectadores**. La longitud del circuito ha sido disminuida de una forma considerable pero nuestro objetivo es conocer la velocidad del móvil al pasar por un **punto determinado** de la tribuna de espectadores. Hemos reducido mucho más el espacio que debe recorrer el móvil. El

tiempo que tardaremos en recorrer dicho punto es muy pequeño, simplemente un instante. Para este propósito debemos calcular la velocidad Instantánea, $\vec{V}_i$.

Debemos definir " $\vec{V}_i$ " y definirla no es cosa fácil. Cuando yo diga "**según el concepto de derivada**" rápidamente aparecerán comentarios tales como **¿eso qué es?**. Estamos dentro del campo de las Matemáticas y es allí donde explicarán que es una derivada. Nosotros para poder seguir trabajando nos tragaremos el **CONCEPTO** y ya nos lo explicarán los matemáticos. El desarrollo matemático que tenemos que hacer a nuestro nivel es muy sencillo y yo explicaré lo indispensable para poder proseguir con nuestro tema.

Pues bien, la $\vec{V}_i$ es igual:

$$\vec{V}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1)$$

En donde:

$\vec{V}_i$ = Velocidad Instantánea

Δ = Variación

$\vec{r}$ = Vector desplazamiento

$\Delta \vec{r}$ = Diferencia entre los valores de vector desplazamiento

$d\vec{r}/dt$ = Variación del vector desplazamiento con respecto al tiempo o **derivada del vector desplazamiento** con respecto al tiempo

Desde el punto de vista de la **Cinemática** la ecuación anterior nos viene a determinar la **velocidad** que lleva el móvil en un **instante determinado**.

El **vector desplazamiento** tiene la expresión:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

Si llevamos el vector desplazamiento a la ecuación (1) nos queda:

$$\begin{aligned} \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt} (r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}) = \\ &= \frac{dr_x}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z}{dt} \vec{k} \\ &\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \\ &\quad V_x \quad V_y \quad V_z \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

Llegamos a la conclusión de que la **velocidad** es:

a) Una **magnitud vectorial**

b) Con un **módulo** cuyo valor lo podemos obtener por la ecuación:

$$|\vec{V}| = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2}$$

c) **Dirección** → Siempre tangente a la trayectoria





d) **Sentido** → El del movimiento de la partícula (punta de flecha)

e) Unidad en el Sistema Internacional:

$$\text{m/s} \longleftrightarrow \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Mediante **cálculo dimensional** vamos a demostrar las unidades de la **Velocidad**.

El **Cálculo Dimensional** implica **poner toda magnitud derivada** (son aquellas que para quedar definidas necesitan de otras unidades, la propia Velocidad para quedar definida depende del espacio recorrido por la partícula y el tiempo empleado en recorrerlo) **en función de las fundamentales** (no necesitan de otras magnitudes para quedar definidas, la masa, el tiempo, longitud) . En el movimiento rectilíneo el módulo del **vector posición** es igual al **espacio recorrido** por el móvil. Suponiendo que la trayectoria es una **línea recta** podemos escribir :

$$\text{Rapidez} = |\text{Velocidad}| = | \vec{v} |$$

Tanto la Rapidez como el módulo de la Velocidad se miden en unidades de longitud y por lo tanto podemos escribir:

$$V = \text{longitud} / \text{tiempo}$$

La longitud y el tiempo son magnitudes fundamentales y podemos sustituirlas por sus siglas en mayúscula. Luego la Ecuación de Dimensiones de la Velocidad es:

$$[V] = L / T \quad \leftrightarrow \quad [V] = L \cdot T^{-1}$$

Es decir, la unidad de velocidad es una unidad de longitud por una unidad de tiempo elevada a -1.

En el Sistema Internacional de Unidades:

MAGNITUD

UNIDAD (S. I)

Velocidad (V)

m / s $\leftrightarrow$ m . s⁻¹

Ejercicio resuelto

Un objeto se mueve según la ecuación $\vec{r} = 3t \, \vec{i} + (4 - 5t^2) \, \vec{j}$ en el S. I. del vector posición. ¿Cuál es su posición inicial? ¿Cuál es su posición a los 2 segundos? ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria? ¿Cuál ha sido el desplazamiento?

Resolución

La posición del objeto tiene como expresión:

$$\vec{r}(t) = 3t \, \vec{i} + (4 - 5t^2) \, \vec{j}$$

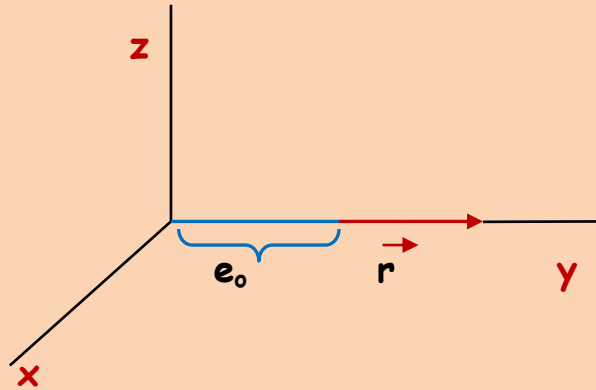
La posición inicial $\rightarrow t = 0$, será:

$$\vec{r}_0 = 3 \cdot 0 \cdot \vec{i} + (4 - 5 \cdot 0) \, \vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 4 \, \vec{j}$$

$$\text{Posición inicial} = e_0 = |\vec{r}| = [(4)^2]^{1/2} = 4 \, \text{m}$$

Inicialmente el móvil se encuentra a **4 m** del origen de coordenadas en la dirección y sentido del eje **OY**:



Posición para $t = 2 \text{ s}$

$$\vec{r}(2) = 3 \cdot 2 \cdot \vec{i} + (4 - 5 \cdot 2^2) \vec{j}$$

$$\vec{r}(2) = 6 \vec{i} + (-16) \vec{j}$$

$$\vec{r}(2) = 6 \vec{i} - 16 \vec{j}$$

$$e_2 = |\vec{r}_2| = [(6)^2 + (-16)^2]^{1/2} = (36 + 256)^{1/2} = 17,08 \text{ m}$$

La ecuación de la trayectoria del movimiento del objeto la obtendremos de las componentes cartesianas del vector posición. La ecuación de la trayectoria responde a la expresión:

$$y = f(x)$$

$$\vec{r}(t) = 3t \vec{i} + (4 - 5t^2) \vec{j} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_x = 3t \rightarrow x = 3t \\ r_y = 4 - 5t^2 \rightarrow y = 4 - 5t^2 \end{array} \right.$$

El tiempo que el objeto se está moviendo es el mismo en el eje **OX** que en el eje **OY**, luego:

Despejaremos el "t" de $x = 3t$ y lo llevaremos a $y = 4 - 5t^2$:

$$t = x/3$$

$$y = 4 - 5(x/3)^2 \quad ; \quad y = 4 - 5(x^2/9) \quad ; \quad y = 4 - 5x^2/9$$

El desplazamiento viene dado por la ecuación:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta \vec{r} = 6 \vec{i} - 16 \vec{j} - (4 \vec{j})$$

$$\Delta \vec{r} = 6 \vec{i} - 20 \vec{j}$$

$$|\Delta \vec{r}| = [6^2 + (-20)^2]^{1/2}$$

$$|\Delta \vec{r}| = (436)^{1/2} = 20,9 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto

El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j} \text{ (S.I.)}$$

Calcular:

- La posición para $t = 2 \text{ s}$.
- La velocidad para $t = 2 \text{ s}$.

Resolución

a)

$$\vec{r}(t) = t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j} \text{ (S.I.)}$$

$$\vec{r}_{(2)} = 2 \vec{i} + (4 + 2) \vec{j}$$

$$\vec{r}_{(2)} = 2 \vec{i} + 6 \vec{j}$$

$$|\vec{r}_{(2)}| = (2^2 + 6^2)^{1/2} = 6,32 \text{ m del sistema de referencia.}$$

b)

$$\vec{r}(t) = t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j} \text{ (S.I.)}$$

$$\vec{V} = d\vec{r}/dt$$

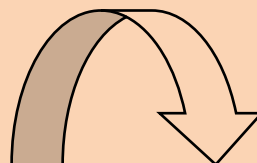
$$\vec{V} = \frac{d(t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j})}{dt} = \vec{i} + 2t \vec{j}$$

$$\vec{V} = \vec{i} + 2t \vec{j}$$

$$V_{(2)} = 0 + 2 \cdot 2 \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(2)} = 4 \vec{j}$$

$$|\vec{V}_{(2)}| = (4^2)^{1/2} = 4 \text{ m/s}^2 = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Ejercicio resuelto

El vector posición de un móvil viene dado por: $r = 2t^2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j}$ (S.I.). Calcular:

- El desplazamiento entre los instantes $t = 3 \text{ s}$ y $t = 6 \text{ s}$.
- Si la trayectoria es una línea recta, determinar la Rapidez y el espacio recorrido en el mismo intervalo de tiempo.
- La velocidad media en el mismo intervalo de tiempo

Resolución

a)

$$\Delta \mathbf{r} \text{ (vector desplazamiento) } = \mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_3$$

$$\vec{r}(t) = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

$$\vec{r}_{(6)} = 2 \cdot 6^2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} = 72 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j}$$

$$\vec{r}_{(3)} = 2 \cdot 3^2 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} = 18 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j}$$

$$\Delta \vec{r} = 72 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} - (18 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j}) = 72 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} - 18 \mathbf{i} + 4 \mathbf{j} = 54 \mathbf{i}$$

$$|\Delta \vec{r}| = (54^2)^{1/2} = 54 \text{ m}$$

b)

Al ser la trayectoria una **línea recta**, la **Rapidez** y la **V_m** son iguales.

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V}_m = \frac{54 \vec{i}}{6 - 3}$$

$$\vec{V}_m = 54 \vec{i} / 3 = 18 \vec{i}$$

$$|\vec{V}_m| = (18^2)^{1/2} = 18 \text{ m/s} = 18 \text{ m.s}^{-1}$$

Luego:

$$\text{Rapidez} = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = |\vec{V}_m|$$

El espacio recorrido:

$$\text{Rapidez} = \Delta s / \Delta t$$

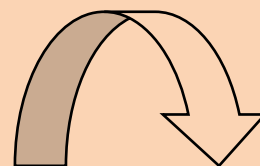
$$\Delta s = \text{Rapidez} \cdot \Delta t$$

$$\Delta s = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot (6 - 3) \text{ s} = 54 \text{ m}$$

Lógicamente coincide con el desplazamiento, $|\vec{\Delta r}|$.

c)

Calculada en el apartado b).



Ejercicio resuelto

Un cuerpo se desplaza en una recta según la ecuación de su posición:

$$\vec{r} = 5t \vec{i} + 2t \vec{j} \quad (\text{S.I.})$$

Calcular:

- La ecuación de la trayectoria.
- La velocidad media en los 5 primeros segundos.
- El módulo de la velocidad media y la rapidez en ese intervalo de tiempo. Explica su posible coincidencia.

Resolución

a)

Componentes cartesianas del vector posición:

$$\vec{r} = 5t \vec{i} + 2t \vec{j}$$

$$x = 5t \quad (1)$$

$$y = 2t \quad (2)$$

Despejamos de (1) el tiempo:

$$t = x / 5$$

Lo llevamos a la ecuación (2):

$$y = 2 \cdot x/5 \quad ;$$

$$y = 2x/5 \quad (\text{Ec. De la trayectoria})$$

b)

$$\vec{r} = 5t \vec{i} + 2t \vec{j} \quad (\text{S.I.})$$

$$\vec{V}_m = r_{(5)} - r_{(0)} / 5 - 0$$

$$r_{(0)} = 5 \cdot 0 \cdot \vec{i} + 2 \cdot 0 \cdot \vec{j} = 0$$

$$r_{(5)} = 5 \cdot 5 \cdot \vec{i} + 2 \cdot 5 \cdot \vec{j} = 25 \vec{i} + 10 \vec{j}$$

$$\vec{V}_m = 25 \vec{i} + 10 \vec{j} - 0 / 5$$

$$\vec{V}_m = 5 \vec{i} + 2 \vec{j}$$

$$|\vec{V}_m| = (5^2 + 2^2)^{1/2} = 29^{1/2} = 5,38 \text{ m/s} = 5,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b)

La ecuación de la trayectoria:

$$y = 2x / 5$$

Corresponde a la ecuación de una **recta** y en una trayectoria rectilínea se cumple la concidición de que el **espacio recorrido** en la trayectoria es igual al **módulo del vector desplazamiento**:

$$\Delta s = |\Delta \vec{r}|$$

Si recordamo el concepto de rapidez:

$$\text{Rapidez} = \Delta s / \Delta t$$

Recordando que:

$$|\vec{V}_m| = \Delta \vec{r} / \Delta t$$

Llegamos a la conclusión:

$$\text{Rapidez} = |\vec{V}_m|$$

$$\text{Rapidez} = 5,38 \text{ m/s} = 5,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ejercicio resuelto

El vector desplazamiento de un móvil viene determinado por la ecuación:

$$\vec{r} = (2t^2 + t)\vec{i} + (3t - 1)\vec{j} + 4\vec{k}$$

Determinar el valor de la velocidad que adquiere el móvil para $t = 5 \text{ s}$.

Resolución

El enunciado no expresa unidades por lo que supondremos que trabajamos en el S.I.

Recordemos que:

$$\vec{V} = d\vec{r}/dt$$

Luego:

$$\vec{V} = d[(2t^2 + t)\vec{i} + (3t - 1)\vec{j} + 4\vec{k}] / dt$$

$$\vec{V} = (4t + 1)\vec{i} + 3\vec{j}$$

Para $t = 5$ s el vector velocidad se expresa por la ecuación:

$$\vec{V} = (4 \cdot 5 + 1) \vec{i} + 3 \vec{j}$$

$$\vec{V} = 21 \vec{i} + 3 \vec{j}$$

El módulo del vector velocidad:

$$|\vec{V}| = [(21)^2 + 3^2]^{1/2} = (441+9)^{1/2} = 21,21 \text{ m/s}$$

Ejercicio resuelto

Hallar la velocidad de un móvil para $t = 1$ s, cuyas coordenadas en función del tiempo vienen expresadas por las ecuaciones:

$$x = t^3 + 1$$

$$y = 2t^2 - 3t$$

$$z = 5t^2 - 2t$$

Resolución

Podemos determinar el vector desplazamiento:

$$\vec{r} = (t^3 + 1) \vec{i} + (2t^2 - 3t) \vec{j} + (5t^2 - 2t) \vec{k}$$

Recordemos que el vector velocidad viene dado por la ecuación:

$$\vec{V} = d\vec{r}/dt$$

$$\vec{V} = d[(t^3 + 1) \vec{i} + (2t^2 - 3t) \vec{j} + (5t^2 - 2t) \vec{k}]/dt$$

$$\vec{V} = 3t^2 \vec{i} + (4t - 3) \vec{j} + (10t - 2) \vec{k}$$

Llevamos el valor del tiempo a la ecuación anterior:

$$\vec{V} = (3 \cdot 1^2) \vec{i} + (4 \cdot 1 - 3) \vec{j} + (10 \cdot 1 - 2) \vec{k}$$

$$\vec{V} = 3 \vec{i} + (4 - 3) \vec{j} + (10 - 2) \vec{k}$$

$$\vec{V} = 3 \vec{i} + \vec{j} + 8 \vec{k}$$

El módulo de la velocidad lo determinamos mediante la ecuación:

$$|\vec{V}| = (3^2 + 1^2 + 8^2)^{1/2} = (9 + 1 + 64)^{1/2} =$$
$$= (74)^{1/2} = 8,6 \text{ m/s}$$

3.- Vector Aceleración

Cinemática vectorial

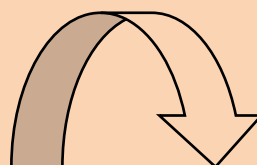
http://www.fisicanet.com.ar/fisica/cinematica/ap02_cinematica.php

Cinemática vectorial

http://www.slideshare.net/moises_galarza/cinematica-vectorial-web

Vector velocidad y vector aceleración

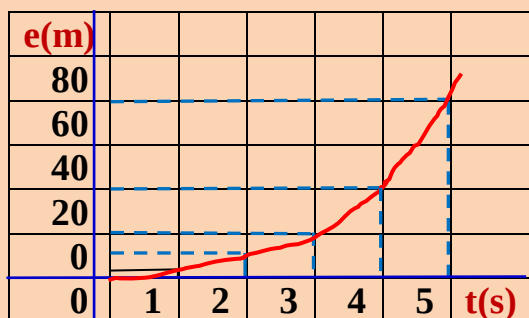
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/curvilineo/curvilineo.htm>



Un móvil realiza un movimiento cuyos datos quedan reflejados en la siguiente tabla:

Espacio (m)	0	5	10	20	40	80
Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5

Realicemos la gráfica **e - t**:



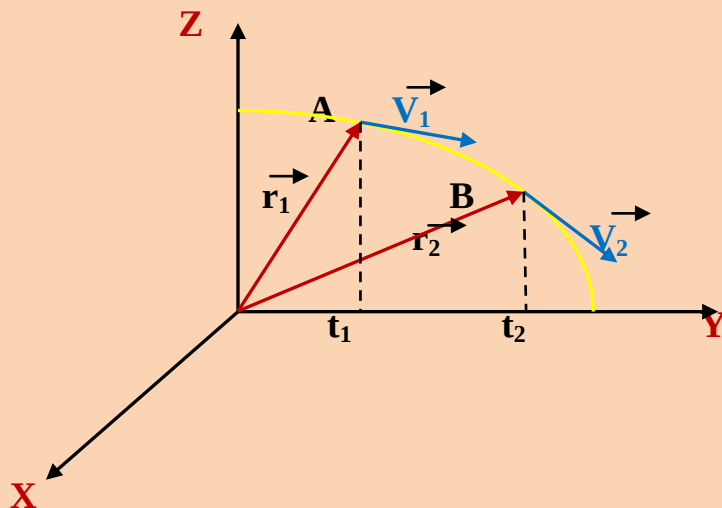
Si calculamos la velocidad del móvil obtenemos ($V = e/t$):

Espacio (m)	0	5	10	20	40	80
Tiempo (s)	0	1	2	3	4	5
Velocidad (m . s⁻¹)	0	5	5	6,7	10	16

Existe una variación de la velocidad.

Debe existir una magnitud que estudie la **variación de la velocidad con respecto al tiempo**. Esta magnitud existe y se conoce como **aceleración**.

Supongamos un punto material cuyo movimiento queda reflejado en la figura adjunta:



En un instante t_1 el punto material se encuentra en la posición **A** con una velocidad $\vec{V}_1$, instantes después, t_2 , se encuentra en la posición **B** con una velocidad $\vec{V}_2$. Podemos definir, al igual que en la velocidad, una **Aceleración Media** (a_m) y una **Aceleración Instantánea** (a_i).

La a_m viene expresada por la ecuación:

$$a_m = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Según esta expresión podemos definir la **Aceleración** como la **variación del vector Velocidad con respecto al tiempo**.

Si vamos disminuyendo el tiempo empleado en pasar de **A** a **B**, es decir, si disminuimos Δt podemos llegar a la **Aceleración Instantánea** que como **vector** queda definida por la expresión:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1)$$

Si recordamos que:

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

La ecuación (1) se transforma en:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}) \quad (2)$$

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 a_x a_y a_z

Por lo que:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Ecuación de la aceleración en función de sus componentes cartesianas.

Si recordamos a su vez que:

$$\vec{V} = \frac{dr_x}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z}{dt} \vec{k}$$

Llevamos la ecuación anterior a la ecuación (2):

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr_x}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z}{dt} \vec{k} \right)$$

Por lo que:

$$\vec{a} = d^2 \Delta \vec{r} / dt^2$$

Esta última ecuación nos permite definir la **Aceleración** en función del **vector desplazamiento**: como la derivada segunda del mismo con respecto al tiempo.

Como podemos observar la **Aceleración Instantánea**, **Aceleración** o **Aceleración Tangencial**, como también se le llama, se trata de una **magnitud vectorial** con las siguientes características:

- a) Posee un **módulo** que podemos obtener mediante la ecuación:

$$|\vec{a}| = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)^{1/2}$$

- b) Una **dirección**, en principio, **tangente a la trayectoria**.
c) Un **sentido** determinado por el avance del punto material.

3.1.- Componentes Intrínsecas de la aceleración

La **Aceleración** se puede dividir en dos componentes: **Aceleración Tangencial**, " $\vec{a}_t$ ", y la **Aceleración Normal**, " $\vec{a}_n$ ". Vamos a determinar el significado y expresión de cada una de ellas: La $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ constituyen las **Componentes Intrínsecas** de la aceleración.

Video: Componentes intrínsecas de la aceleración

<http://www.youtube.com/watch?v=m5hJHz9Ot-o>

La Aceleración la hemos definido como la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt \quad (1)$$

Recordar que todo vector es igual al módulo de dicho vector por el vector unitario en la dirección del mismo, es decir:

$$\vec{V} = |\vec{V}| \cdot \vec{u}$$

Vamos a llevar esta última ecuación a la ecuación (1):

$$\vec{a} = d/dt (|\vec{V}| \cdot \vec{u})$$

Esta última expresión es la derivada de un producto: **el primero por la derivada del segundo más el segundo por la derivada del primero:**

$$\vec{a} = |\vec{V}| \cdot (d\vec{u}/dt) + \vec{u} \cdot (d|\vec{V}|/dt)$$

Esta ecuación, como podemos observar, tiene dos términos en el miembro de la derecha. Es muy importante saber el significado de cada uno de ellos.

Empezaré por el 2º por facilidad de comprensión:

$$\vec{u} \cdot d|\vec{V}|/dt$$

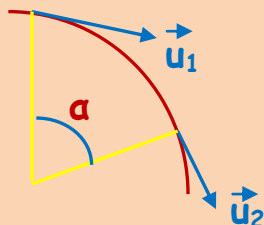
Observar como en esta expresión el **vector unitario permanece constante**, es decir, **no hay cambio de dirección**. Sin embargo el módulo de la velocidad **sí varía con respecto al tiempo** y esa variación la definimos como **Aceleración tangencial** ($\vec{a}_t$). Luego:

$$\vec{a}_t = d |\vec{V}| / dt$$

En el primer miembro:

$$|\vec{V}| \cdot d\vec{u} / dt \quad (1)$$

El **módulo** de la velocidad **permanece constante** y sin embargo el vector unitario "u" está variando con respecto al tiempo lo que implica una **variación de la dirección del vector $\vec{V}$** .



La variación del vector unitario, con respecto al tiempo, implica **velocidad angular**, $\vec{w}$:

$$d\vec{u} / dt = \vec{w} \text{ (velocidad angular)}$$

Llevamos la última ecuación a (1):

$$|\vec{a}_n| = |\vec{V}| \cdot d\vec{u} / dt = |\vec{V}| \cdot |\vec{w}|$$

Como:

$$v = w \cdot R \rightarrow |\vec{w}| = |\vec{v}| / R \text{ nos queda:}$$

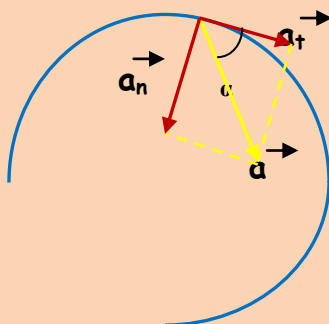
$$|\vec{a}_n| = |\vec{v}| \cdot (|\vec{v}| / R)$$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{v}|^2 / R$$

$$a_n = V^2 / R$$

En donde **R** es el radio de curvatura de la trayectoria.

En un **movimiento circular** es donde se observan perfectamente estas dos componentes de la aceleración.



Vectorialmente:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Por Pitágoras:

$$|\vec{a}| = (|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_n|^2)^{1/2}$$

La importancia de las **Componentes Intrínsecas** de la aceleración se basa en el hecho de que **su existencia o no existencia** en un movimiento nos permite el establecimiento de los **diferentes tipos de movimientos**.

Para poder iniciarnos en los ejercicios de Cinemática vectorial vamos a ver el mecanismo de las derivadas. El concepto matemático de la derivada la conoceréis en Matemáticas. En Matemáticas es muy corriente encontrarnos con ecuaciones de la forma:

$$y = f(x)$$

y = Variable dependiente (depende de la variable x)

x = Variable independiente.

La variable " y " depende de la variable " x ".

En Física es más corriente encontrarnos con:

$$e = f(t)$$

El espacio recorrido por el punto material depende del tiempo.

Vamos a derivar:

Dada la función $y = f(x) = x^n$

La derivada se representa de la forma $y' = f'(x)$

En nuestra función multiplicamos el exponente de la variable " x " por el coeficiente de dicha variable, por la variable " x " disminuido su exponente en una unidad y multiplicada por la derivada de la variable " x ":

$$y' = n \cdot x^{n-1} \cdot (x)'$$

$$x' = x^{1-1} = x^0 = 1$$

Por lo tanto:

$$y' = n \cdot x^{n-1} \cdot 1$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

La derivada de una **CONSTANTE** es **CERO**.

Ejercicio resuelto

Derivar las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$

b) $y = x^3 - 4$

c) $y = x^4 - 3x^3 - 5$

Resolución

La derivada de la variable "**x**" (como base exponencial) siempre vale 1 y por lo tanto la podemos eliminar de los cálculos.

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$

$$y' = 3 \cdot 2 x^{2-1} - 1 \cdot 5 x^{1-1} + 0$$

$$y' = 6x - 5$$

b) $y = x^3 - 4$

$$y' = 3 \cdot 1 \cdot x^{3-1} - 0$$

$$y' = 3x^2$$

c) $y = x^4 - 3x^3 - 5$

$$y' = 4 \cdot 1 \cdot x^{4-1} - 3 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 0$$

$$y' = 4x^3 - 9x^2$$

En Física son más corriente las funciones:

a) $e = 3t^2 - 5t + 3$

b) $e = t^3 - 4$

c) $e = t^4 - 3t^3 - 5$

En este caso es el Espacio quien depende del tiempo. Las funciones son las mismas y los resultados serán:

$$a) e' = 6t - 5$$

$$b) e' = 3t^2$$

$$c) e' = 4t^3 - 9t^2$$

Ejercicio resuelto

La velocidad inicial de un objeto es $\vec{V}_0 = (3\vec{i} + 5\vec{j})$ m/s y al cabo de 10 segundos es $\vec{V} = (3\vec{i} - 5\vec{j})$ m/s . Determina la aceleración media.

Resolución

$$\vec{V}_0 = (3\vec{i} + 5\vec{j}) \text{ m/s}$$

$$\vec{V}_{(10)} = (3\vec{i} - 5\vec{j}) \text{ m/s}$$

La ecuación de la **aceleración media** obedece a la expresión:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{V}_{(10)} - \vec{V}_0}{t_{10} - t_0}$$

$$\vec{a}_m = [(3\vec{i} + 5\vec{j}) - (3\vec{i} - 5\vec{j})] / (10 - 0) ;$$

$$\vec{a}_m = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{i} + 5\vec{j} / 10 ;$$

$$\vec{a}_m = 10\vec{j} / 10 = 1\vec{j} \text{ m/s}^2 = 1\vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

La velocidad de un cuerpo viene dada por $v(t) = (5t + 10) \mathbf{i} - 5 \mathbf{j}$. Calcula la aceleración. ¿Es una aceleración constante o variable?.

Resolución

$$\vec{V}(t) = (5t + 10) \mathbf{i} - 5 \mathbf{j}$$

La aceleración se define como:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

Por lo tanto:

$$\vec{a} = d/dt (5t + 10) \mathbf{i} - 5 \mathbf{j}$$

$$\vec{a} = 5 \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 5 \mathbf{i} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Se trata de una **aceleración constante** puesto que no depende de la **magnitud tiempo**.

Ejercicio resuelto

El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t \cdot \mathbf{i} + (t^2 + 2) \mathbf{j} \quad (\text{S} \cdot \text{I.})$$

Calcular:

- La posición, velocidad y aceleración en el instante $t = 2$ segundos.
- La aceleración media entre 0 y 2 segundos.

Resolución

$$\vec{r}(t) = t \cdot \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j}$$

a)

Posición a los 2 s:

$$\vec{r}_{(2)} = 2 \cdot \vec{i} + (4 + 2) \vec{j} = 2 \vec{i} + 6 \vec{j}$$

$$|\vec{r}_{(2)}| = (2^2 + 6^2)^{1/2} = 40^{1/2} = 6,32 \text{ m}$$

Velocidad:

$$V = d\vec{r}_1 / dt$$

$$\vec{V}_{(2)} = \frac{d}{dt} [(t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j})]$$

$$\vec{V}_{(2)} = \vec{i} + 2t \vec{j} = \vec{i} + 2 \cdot 2 \vec{j} = \vec{i} + 4 \vec{j}$$

$$|\vec{V}_{(2)}| = (1^2 + 4^2)^{1/2} = 17^{1/2} = 4,12 \text{ m/s} = 4,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Aceleración:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt = \frac{d}{dt} (\vec{i} + 2t \vec{j}) = 2 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}| = (2^2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b)

$$\vec{a}_m = \vec{V}_{(2)} - \vec{V}_{(0)} / 2 - 0$$

$$\vec{V}_{(2)} = \vec{i} + 2 \cdot 2 \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(2)} = \vec{i} + 4 \vec{j}$$

$$\vec{V}_0 = \vec{i} + 2 \cdot 0 \vec{j} ; \vec{V}_0 = \vec{i}$$

$$\vec{a}_m = \vec{i} + 4 \vec{j} - (\vec{i}) / 2$$

$$\vec{a}_m = 2 \vec{j}$$

$$|\vec{a}_m| = (2^2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

El vector posición de un móvil viene dado por : $r = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$ (S.I.). Calcular: a) La velocidad media entre 3 y 6 segundos; b) La velocidad instantánea.

Resolución

a)

$$\vec{r}(t) = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

$$\vec{V}_m = \vec{r}_{(6)} - \vec{r}_{(3)} / 6 - 3$$

$$\vec{r}_{(6)} = 2 \cdot 6^2 \cdot \vec{i} - 4 \vec{j} ; \vec{r}_{(6)} = 72 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

$$\vec{r}_{(3)} = 2 \cdot 3^2 \cdot \vec{i} - 4 \vec{j} ; \vec{r}_{(3)} = 18 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

$$\vec{V}_m = (72 \vec{i} - 4 \vec{j}) - (18 \vec{i} - 4 \vec{j}) / 3$$

$$\vec{V}_m = 54/3 \vec{i} = 18 \vec{i}$$

$$|\vec{V}_m| = (18^2)^{1/2} = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b)

$$\vec{r}(t) = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt \rightarrow \vec{V} = 4t \vec{i}$$

Ejercicio resuelto

El vector posición de un móvil viene dado por : $r = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$ (S.I.). Calcular: a) La aceleración a los 2 segundos ; b) El módulo de la aceleración tangencial.

Resolución

- a) Cuando nos piden la aceleración sin especificar el término **"media"**, se refieren a la **aceleración instantánea**. Lo mismo ocurre con la **velocidad**.

Recordar que la aceleración viene dada por la ecuación:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

Debemos conocer la velocidad que viene dada por la ecuación:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

Como el vector posición es conocido, la velocidad valdrá:

$$\vec{r} = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

$$\vec{V} = 4t \vec{i}$$

La aceleración será:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{a} = 4 \vec{i}$$

$$|\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4 \text{ m. s}^{-2}$$

b)

La aceleración tangencial:

$$|\vec{a}_t| = d|\vec{V}| / dt$$

$$|\vec{V}| = [(4t)^2]^{1/2} = 4t$$

$$|\vec{a}_t| = 4 \text{ m. s}^{-2}$$

Tanto la aceleración como la aceleración tangencial **son constantes** y por lo tanto **independientes del tiempo**.

Ejercicio resuelto

La velocidad de un móvil viene dada por las ecuaciones: $V_x = 3 + 2t^2$ y $V_y = 3t$ (S.I.). Calcular: a) La velocidad al cabo de 1 s ; b) La aceleración "i" y su módulo.

Resolución

a) La ecuación de la velocidad es:

$$\vec{V} = (3 + 2t^2) \vec{i} + 3t \vec{j} \quad (\text{S.I.})$$

Para $t = 1 \text{ s}$

$$\vec{V}_{(1)} = (3 + 2 \cdot 1^2) \vec{i} + 3 \cdot 1 \cdot \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(1)} = 5 \vec{i} + 3 \vec{j}$$

$$|\vec{V}_{(1)}| = (5^2 + 3^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) La aceleración instantánea viene dada por la ecuación:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{V} = (3 + 2t^2) \vec{i} + 3t \vec{j}$$

$$\vec{a} = 4t \vec{i} + 3 \vec{j}$$

$$|\vec{a}| = [(4t)^2 + 3^2]^{1/2} = (16t^2 + 9)^{1/2}$$

Para $t = 1 \text{ s}$

$$|\vec{a}| = (16 + 9)^{1/2} = 25^{1/2} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

La posición de un móvil viene dada por: $x = 2t$; $y = 2t^2 - 1$, en el S.I. Calcular: a) La ecuación de la trayectoria; b) La V_i ; c) La aceleración a los 10 s.

Resolución

a) El vector posición viene dado por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 2t \vec{i} + (2t^2 - 1) \vec{j}$$

Sus ecuaciones cartesianas nos permitirán conocer la ecuación de la trayectoria:

$$x = 2t \quad (1)$$

$$y = 2t^2 - 1 \quad (2)$$

De (1) despejamos el tiempo:

$$t = x / 2$$

El tiempo lo llevamos a (2):

$$y = 2 (x/2)^2 - 1$$

$$y = x^2/2 - 1$$

$$b) \vec{r}(t) = 2t \vec{i} + (2t^2 - 1) \vec{j}$$

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{V} = 2 \vec{i} + 4t \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) La ecuación de la aceleración:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{V} = 2 \vec{i} + 4t \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$|\vec{a}| = 4 \vec{j} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

El $t = 10 \text{ s}$. no es utilizado puesto que la aceleración es constante y no depende del tiempo.

Ejercicio resuelto

La velocidad de un móvil que sigue una trayectoria rectilínea viene dada por la ecuación: $V(t) = (t^2 - 8t) \mathbf{j}$, en unidades del S. I.. Calcular: a) La aceleración media entre los instantes $t = 2 \text{ s}$ y $t = 4 \text{ s}$; b) La aceleración instantánea en $t = 3 \text{ s}$ y c) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

Resolución

Según la ecuación de la velocidad:

$$\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) \vec{j}$$

El desplazamiento del móvil se realiza a lo largo del eje OY
Y por lo tanto lleva una **trayectoria rectilínea**.

a) Ecuación de la $\mathbf{a}_m$:

$$\vec{a}_m = \vec{V}_{(4)} - \vec{V}_{(2)} / \Delta t$$

Calcularemos las velocidades:

$$\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{(4)} &= (4^2 - 8 \cdot 4) \mathbf{j} ; \quad \vec{V}_{(4)} = -16 \mathbf{j} \\ \vec{V}_{(2)} &= (2^2 - 8 \cdot 2) \mathbf{j} ; \quad \vec{V}_{(2)} = -12 \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_m = -16 \vec{j} - (-12 \vec{j}) / 4 - 2$$

$$\vec{a}_m = -2 \vec{j}$$

$$|\vec{a}_m| = (-2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Ecuación de la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) \vec{j}$$

$$|\vec{V}| = [(t^2 - 8t)^2]^{1/2} = t^2 - 8t$$

$$\vec{a} = (2t - 8) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{(3)} = (2 \cdot 3 - 8) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{(3)} = -2 \vec{j}$$

$$|\vec{a}_{(3)}| = (-2^2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c) Como se dijo, el móvil lleva una **trayectoria rectilínea**.

Las componentes intrínsecas de la aceleración son:

$$|\vec{a}_t| = d|\vec{V}| / dt$$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{V}|^2 / R$$

Sabiendo que $\vec{V}(t) = (t^2 - 8t) \vec{j}$:

$$|\vec{V}| = [(t^2 - 8t)^2]^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (t^2 - 8t) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$|\vec{V}| = [(t^2 - 8t)^2]^{1/2}$$

$$|\vec{a}_t| = (2t - 8) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{V}|^2 / R$$

Al ser la trayectoria una línea recta $R = \infty$ por lo que al sustituir R en la ecuación anterior y sabiendo que todo número dividido por ∞ es igual a cero, nos quedaría:

$$|\vec{a}_n| = |\vec{V}|^2 / \infty = 0$$

Al llevar una trayectoria rectilínea $a_n = 0$, no existe cambio en la dirección del movimiento.

Ejercicio resuelto

El vector posición de un punto, en función del tiempo, viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j} \text{ (S.I.)}$$

Calcular:

- La aceleración media entre 0 y 2 s.
- La aceleración instantánea.

Resolución

a) Ecuación de $\vec{a}_m$:

$$\vec{a}_m = \vec{V}_{(2)} - \vec{V}_{(0)} / 2 - 0$$

Debemos conocer la ecuación de la velocidad:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{r}(t) = t \vec{i} + (t^2 + 2) \vec{j}$$

$$\vec{V} = \vec{i} + 2t \vec{j}$$

Conocida la ecuación de la velocidad podemos conocer $V_{(2)}$ y $V_{(0)}$:

$$\vec{V}_{(2)} = \vec{i} + 2 \cdot 2 \cdot \vec{j} ; \vec{V}_{(2)} = \vec{i} + 4 \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(0)} = \vec{i} + 2 \cdot 0 \cdot \vec{j} ; \vec{V}_{(0)} = \vec{i}$$

El valor de $\vec{a}_m$:

$$\vec{a}_m = (\vec{i} + 4 \vec{j}) - \vec{i} / 2 - 0$$

$$\vec{a}_m = 2 \vec{j}$$

$$|\vec{a}_m| = (2^2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Ecuación de la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{a} = d/dt (\vec{i} + 2t \vec{j})$$

$$\vec{a} = 2 \vec{j}$$

$$|\vec{a}| = (2^2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

El vector posición de un móvil viene dado por: $r = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$ (S.I.). Calcular:

- La velocidad Instantánea.
- La aceleración a los 2 segundos.
- El módulo de la aceleración tangencial.

Resolución

a) Ecuación de la Velocidad Instantánea:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

Sabiendo que el vector posición viene dado por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = 2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j}$$

La ecuación de la velocidad será:

$$\vec{V} = d/dt (2t^2 \vec{i} - 4 \vec{j})$$

$$\vec{V} = 4t \vec{i}$$

b) Ecuación de la aceleración:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{V} = 4t \vec{i}$$

$$\vec{a} = 4 \vec{i}$$

$$|\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

La aceleración es constante e independiente del tiempo.

Para $t = 2 \text{ s}$ la aceleración será de $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

c) La ecuación correspondiente obedece a la expresión:

$$|\vec{a}| = d|\vec{V}| / dt$$

Sabiendo que $\vec{V} = 4t \vec{i}$, podemos conocer el **módulo de la velocidad**

$$|\vec{V}| = [(4t)^2]^{1/2} = 4t$$

Lo que implica:

$$|\vec{a}| = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

La velocidad de un móvil viene dada por las ecuaciones: $V_x = 3 + 2t^2$ y $V_y = 3t$ (S.I.). Calcular:

- La velocidad al cabo de $t = 1 \text{ s}$.
- La Aceleración Instantánea y su módulo.

Resolución

- El vector velocidad obedece a la ecuación:

$$\vec{V}(t) = (3 + 2t^2) \vec{i} + 3t \vec{j}$$

Luego para $t = 1$:

$$\vec{V}_{(1)} = (3 + 2t^2) \vec{i} + 3t \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(1)} = 5 \vec{i} + 3 \vec{j}$$

$$|\vec{V}| = (5^2 + 3^2)^{1/2} = 34^{1/2} = 5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Ecuación de la aceleración:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt$$

Siendo $\vec{V}$:

$$\vec{V} = (3 + 2t^2) \vec{i} + 3t \vec{j}$$

$$\vec{a} = 4t \vec{i} + 3 \vec{j}$$

En lo referente al módulo:

$$|\vec{a}| = [(4t)^2 + 3^2]^{1/2} = (16t^2 + 9)^{1/2}$$

Ejercicio resuelto

Las ecuaciones paramétricas del movimiento de una partícula vienen dadas por: $x = 2t + 3$; $y = 2t^2 - 1$. Hallar:

- La ecuación de la trayectoria.
- El vector desplazamiento entre los instantes $t = 1$ s y $t = 3$ s.
- La V_m en el mismo intervalo de tiempo.
- La Velocidad a los 3 s.
- La aceleración Instantánea.
- Las componentes intrínsecas de la aceleración para $t = 1$ s.
- Suponiendo una trayectoria circular, calcular el Radio de curvatura.

Resolución

- a) Ecuación de la trayectoria:

$$x = 2t + 3 \quad (1)$$

$$y = 2t^2 - 1 \quad (2)$$

Despejamos de (1) el tiempo:

$$t = (x - 3) / 2$$

Llevamos el tiempo a la ecuación (2):

$$y = 2 [(x - 3) / 2]^2 - 1$$

$$y = [(x^2 - 6x + 9) / 2] - 1$$

$$y = x^2/2 - 3x + 9/2 - 1$$

$$y = x^2/2 - 3x + 7/2$$

b) El vector posición viene dado por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = (2t + 3) \vec{i} + (2t^2 - 1) \vec{j}$$

Vector desplazamiento para el intervalo de tiempo $t = 1$ s y $t = 3$ s:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_{(3)} - \vec{r}_{(1)} \quad (\text{Vector desplazamiento})$$

$$\vec{r}_{(3)} = (2 \cdot 3 + 3) \vec{i} + (2 \cdot 3^2 - 1) \vec{j}$$

$$\vec{r}_{(3)} = 9 \vec{i} + 17 \vec{j}$$

$$\vec{r}_{(1)} = (2 \cdot 1 + 3) \vec{i} + (2 \cdot 1^2 - 1) \vec{j}$$

$$\vec{r}_{(1)} = 5 \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{\Delta r} = (9 \vec{i} + 17 \vec{j}) - (5 \vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = 9 \vec{i} + 17 \vec{j} - 5 \vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{\Delta r} = 4 \vec{i} + 16 \vec{j}$$

$$c) \vec{v}_m = \vec{\Delta r} / \Delta t$$

$$\vec{v}_m = 4 \vec{i} + 16 \vec{j} / 3 - 1$$

$$\vec{v}_m = 2 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

$$d) \vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{r}(t) = (2t + 3) \vec{i} + (2t^2 - 1) \vec{j}$$

$$\vec{V} = 2 \vec{i} + 4t \vec{j}$$

$$\vec{V}_{(3)} = 2 \vec{i} + 4 \cdot 3 \vec{j} ; \vec{V}_{(3)} = 2 \vec{i} + 12 \vec{j}$$

$$|\vec{V}_{(3)}| = (2^2 + 12^2)^{1/2} = 148^{1/2} = 12,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$e) \vec{a} = d\vec{V} / dt$$

$$\vec{V} = 2 \vec{i} + 4t \vec{j}$$

$$\vec{a} = 4 \vec{j}$$

$$|\vec{a}| = (4^2)^{1/2} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$f) |\vec{a}_t| = d|\vec{V}| / dt$$

$$\vec{V} = 2 \vec{i} + 4t \vec{j}$$

$$|\vec{V}| = [(2^2 + (4t)^2)]^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (4 + 16t^2)^{1/2}$$

$$|\vec{a_t}| = d|\vec{V}| / dt$$

$$|\vec{a_t}| = \frac{1}{2} (4 + 16t^2)^{1/2 - 1} \cdot (32t)$$

$$|\vec{a_t}| = \frac{1}{2} (4 + 16t^2)^{-1/2} \cdot 32t$$

$$|a_t| = \frac{1}{2} \cdot 32t / (4 + 16t^2)^{1/2}$$

$$|\vec{a_t}| = 16t / (4 + 16t^2)^{1/2} = 16 \cdot 1 / (4 + 16)^{1/2} =$$

$$= 16 / 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$= 3,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$|\vec{a}| = (|a_t|^2 + |a_n|^2)^{1/2}$$

$$4 = [(3,57)^2 + a_n^2]^{1/2}$$

$$16 = 12,74 + a_n^2$$

$$a_n^2 = 3,26$$

$$|\vec{a_n}| = (3,26)^{1/2} = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g) |\vec{a_n}| = |\vec{V}|^2 / R \quad (1)$$

$$\vec{V} = 2i + 4tj$$

$$\rightarrow t = 1$$

$$\rightarrow V = 2i + 4j$$

$$|\vec{V}| = (2^2 + 4^2)^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

De (1):

$$R = |\vec{V}|^2 / a_n$$

$$R = (4,47)^2 / 1,8 = 19,9 / 1,8 = 11 \text{ m}.$$

Ejercicio resuelto

La posición de una partícula móvil viene dada por sus componentes cartesianas:

$$x = 2t^2 + 5 ; y = 3t^3 + t^2 - 5 ; z = 3t + 2$$

Determinar:

- El módulo de la velocidad y aceleración para $t = 2 \text{ s}$.
- El radio de curvatura de la trayectoria seguida por el móvil.

Resolución

- Lo primero que haremos es establecer el vector posición de la partícula:

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 5) \vec{i} + (3t^3 + t^2 - 5) \vec{j} + (3t + 2) \vec{k}$$

Sabemos que el vector velocidad es:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{V} = d/dt (2t^2 + 5) \vec{i} + (3t^3 + t^2 - 5) \vec{j} + (3t + 2) \vec{k} =$$

$$= 4t \vec{i} + (9t^2 + 2t) \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$|\vec{V}| = [(4t)^2 + (9t^2 + 2t)^2 + 3^2]^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (16t^2 + 81t^4 + 4t^2 + 36t^3 + 9)^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9)^{1/2}$$

$$\vec{V}_{(2)} = 4 \cdot 2 \vec{i} + (36 + 4) \vec{j} + 3 \vec{k} = 8 \vec{i} + 40 \vec{j} + 3 \vec{k}$$

$$|\vec{V}| = (8^2 + 40^2 + 3^2)^{1/2} = (1673)^{1/2} = 40,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Por otra parte sabemos que el vector aceleración es:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt = d/dt [4t \vec{i} + (9t^2 + 2t) \vec{j} + 3 \vec{k}] =$$

$$= 4 \vec{i} + (18t + 2) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{(2)} = 4 \vec{i} + (36 + 2) \vec{j}$$

$$\vec{a}_{(2)} = 4 \vec{i} + 38 \vec{j}$$

$$|\vec{a}_2| = (4^2 + 38^2)^{1/2} = (16 + 1444)^{1/2} = 38,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Para conocer el radio de curvatura utilizaremos la ecuación:

$$a_n = V^2/R$$

De la ecuación anterior:

$$R = V^2 / a_n \quad (1)$$

Necesitamos por tanto conocer a_n (aceleración normal) y lo haremos mediante de la ecuación:

$$|\vec{a}| = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} \quad (2)$$

Esta última ecuación nos obliga a conocer a_t (aceleración tangencial):

$$\vec{a}_t = d |\vec{v}| / dt$$

$$\vec{a}_t = (d / dt) (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = \frac{1}{2} (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (324t^3 + 108t^2 + 40t)$$

$$\vec{a}_t = \frac{1}{2} (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9)^{-1/2} \cdot (324t^3 + 108t^2 + 40t)$$

$$\vec{a}_t = 324t^3 + 108t^2 + 40t / 2 \cdot (81t^4 + 36t^3 + 20t^2 + 9)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = (2592 + 432 + 80) / 2 \cdot (1296 + 288 + 80 + 9)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = 3104 / 2 \cdot 40,9 = 3104 / 81,8 = 37,94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Si nos vamos a la ecuación (2):

$$|\vec{a}| = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$$

$$38,2 = (37,94^2 + a_n^2)^{1/2}$$

Elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$1459,24 = 1439,44 + a_n^2$$

$$a_n = (1459,24 - 1439,44)^{1/2}$$

$$a_n = 4,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Nos vamos a la ecuación (1):

$$R = V^2 / a_n$$

$$R = (40,9)^2 / 4,45 = 375,91 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto

El vector posición de un móvil viene dado por la expresión:

$$\vec{r}(t) = (2t^3 - 5t^2 + 3) \vec{i}$$

Determinar:

- Tipo de movimiento y dirección del móvil.
- Aceleración total del mismo para $t = 1 \text{ s}$.

Resolución

- Según la ecuación del vector posición:

$$\vec{r}(t) = (2t^3 - 5t^2 + 3) \vec{i}$$

Solo existe componente del mismo en la dirección del eje OX.

El tipo de movimiento lo iremos determinando en la cuestión b).

- Recordemos que:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt \quad (1)$$

Por otra parte:

$$\vec{V} = d\vec{r} / dt$$

$$\vec{V} = (d / dt) (2t^3 - 5t^2 + 3) i = (6t^2 - 10t) \vec{i}$$

El vector velocidad depende del tiempo y por lo tanto se trata de un **Movimiento Variado**.

La **aceleración**, yéndonos a la ecuación (1):

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt = (d / dt) (6t^2 - 10t) i = (12t - 10) \vec{i}$$

No se trata de un Movimiento Uniformemente Acelerado puesto que el vector aceleración depende del tiempo. Su valor para $t = 1$ s:

$$\vec{a}_1 = (12 \cdot 1 - 10) \vec{i} = 2 \vec{i}$$

$$| \vec{a} | = (2^2)^{1/2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

El vector posición de un móvil tiene la expresión:

$$\vec{r}(t) = 5 t \vec{i} - 3 t^2 \vec{j} + t^3 \vec{k}$$

Determinar:

- Módulos del vector velocidad y aceleración para $t = 1$ s.
- Componentes intrínsecas de la aceleración.

Resolución

$$a) \quad \vec{r}(t) = 5t \, \vec{i} - 3t \, \vec{j} + t^2 \, \vec{k}$$

$$\vec{V} = d\vec{r}/dt = (d/dt) (5t \, \vec{i} - 3t \, \vec{j} + t^2 \, \vec{k})$$

$$\vec{V} = 5 \, \vec{i} + 2t \, \vec{k}$$

$$|\vec{V}| = [(5^2 + (2t)^2)]^{1/2}$$

$$|\vec{V}| = (25 + 4t^2)^{1/2}$$

$$|\vec{V}_{(1)}| = (25 + 4)^{1/2} = 5,38 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Recordemos que:

$$\vec{a} = d\vec{V}/dt$$

$$\vec{a} = (d/dt) (5 \, \vec{i} + 2t \, \vec{k})^{1/2} = 2 \, \vec{k}$$

$$|\vec{a}_1| = (2)^{1/2} = 1,41 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b) Sabemos que:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$$|\vec{a}| = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2} \quad (1)$$

Por otra parte:

$$\vec{a}_t = d|\vec{V}|/dt = d/dt (25 + 4t^2)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = \frac{1}{2} (25 + 4t^2)^{-1/2} \cdot 8t = 8t / 2 \cdot (25 + 4t^2)^{1/2}$$

$$\vec{a}_t = 8 \cdot 1 / 2 \cdot 5,38 = 8 / 10,76 = 0,74 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$$1,41 = (0,74^2 + a_n^2)^{1/2}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado:

$$1,98 = 0,54 + a_n^2$$

$$a_n^2 = 1,98 - 0,54$$

$$a_n = (1,44)^{1/2} = 1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

El radio de curvatura de la trayectoria circular descrita por un móvil tiene un valor de 50 cm y la ecuación de su movimiento viene dada, en función del tiempo, por la expresión:

$$e = 3t^2 + 6t + 4$$

Determina las componentes intrínsecas de la aceleración así como el valor de la aceleración para $t = 5 \text{ s}$.

Resolución

$$R = 50 \cancel{\text{ cm}} \cdot (1 \text{ m} / 100 \cancel{\text{ cm}}) = 0,50 \text{ m}$$

$$e = 3t^2 + 6t + 4$$

Partiremos del concepto de velocidad:

$$\vec{V} = d\vec{e} / dt$$

$$\vec{V} = (d / dt) (3t^2 + 5t + 4)$$

$$\vec{V} = 6t + 5$$

$$| \vec{V} | = (36t^2 + 25)^{1/2}$$

La aceleración:

$$\vec{a} = d\vec{V} / dt = (d / dt) (6t + 5) = 6$$

$$| \vec{a} | = (6^2)^{1/2}$$

$$| \vec{a} | = 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Por otra parte:

$$\vec{a}_t = d | \vec{V} | / dt = (d / dt) (36t^2 + 25)^{1/2}$$

$$a_t = \frac{1}{2} \cdot (36t^2 + 25)^{1/2-1} \cdot 72t = 72t / 2 (36 \cdot 25 + 25)^{-1/2}$$

$$a_t = (72 \cdot 5) / (2 \cdot 30,41) = 360 / 60,82 = 5,91 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Recordemos: $| \vec{a} | = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$

$$6 = [(5,91)^2 + a_n^2]^{1/2}$$

Elevando los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$36 = 34,9 + a_n^2$$

$$a_n^2 = 36 - 34,9$$

$$a_n = (36 - 34,9)^{1/2} = 1,04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4.- Movimiento Rectilíneo y Uniforme (M.R.U)

Movimiento Rectilíneo y Uniforme

<https://www.matesfacil.com/fisica/cinematica/MRU/ejercicios-problemas-resueltos-movimiento-rectilineo-uniforme.html>

Movimiento Rectilíneo y Uniforme

<https://www.significados.com/movimiento-rectilineo-uniforme/>

Movimiento Rectilíneo y Uniforme

[https://www.fisicalab.com/apartado/mru#:~:text=El%20movimiento%20rectil%C3%ADneo%20uniforme%20\(m.r.u.,siempre%20a%20la%20misma%20velocidad.](https://www.fisicalab.com/apartado/mru#:~:text=El%20movimiento%20rectil%C3%ADneo%20uniforme%20(m.r.u.,siempre%20a%20la%20misma%20velocidad.)

Movimiento Rectilíneo y Uniforme

<https://www.lifeder.com/movimiento-rectilineo-uniforme/>

Animación: Movimiento Rectilíneo y Uniforme

https://www.youtube.com/watch?v=_-P_YfrlzgA

Resolución de un ejercicio del Movimiento Rectilíneo y Uniforme

<https://www.youtube.com/watch?v=NyiGzIMzK40>

Para llegar a conocer un movimiento es indispensable el conocimiento de su **Ecuación de Movimiento** y a partir de ella conoceremos otras **magnitudes vectoriales** como la **velocidad** y la **aceleración**.

En este tipo de movimiento la **Ecuación del Movimiento** es de la forma:

$$e = f(t)$$

Sus características:

- a) Tiene una **trayectoria Rectilínea**
- b) No existe **aceleración tangencial** puesto que la **velocidad es constante**
- c) Al ser la trayectoria rectilínea $a_n = 0$. No existe **aceleración normal**, a_n

Al ser la trayectoria una línea recta la Rapidez y Velocidad son iguales:

$$V_m = \text{Rapidez} = \Delta s / \Delta t$$

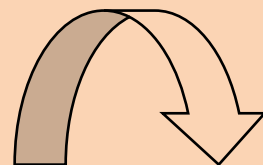
Como la $V = \text{Const} \rightarrow V_i = \text{constante}$ e igual a V_m y Rapidez

Sabemos que:

$$V = ds / dt$$

Despejando ds:

$$ds = V \cdot dt$$



Si procedemos a la Integración de los dos miembros de la ecuación:

$$\int ds = \int V \cdot dt$$

Las constantes pueden salir fuera del signo de integración:

$$\int ds = V \int dt$$

$$s = V \cdot t + C \quad (1)$$

C = Constante de integración

Tenemos que averiguar el significado de " C " y para ello nos vamos a $t = 0$ por lo que:

$$s = v \cdot 0 + C$$

$$s = C$$

" C " es un espacio o longitud recorrido, Como aparece cuando $t = 0$, le llamamos **espacio inicial recorrido**, s_0 . Si llevamos esta conclusión a la ecuación (1):

$$s = v \cdot t + s_0$$

Para que la ecuación nos sea más familiar cambiaremos el orden de los miembros de la derecha:

$$s = s_0 + V \cdot t$$

Ecuación que nos permite conocer el Espacio recorrido por el móvil o la Posición que ocupa el móvil en un tiempo determinado.

Si no existiera espacio inicial, s_0 , la ecuación nos quedaría de la forma:

$$s = V \cdot t$$

4.1.- El estudio gráfico del M.R.U.

Si comparamos las ecuaciones:

$$s = s_0 + V \cdot t \quad (1)$$

$$s = V \cdot t \quad (2)$$

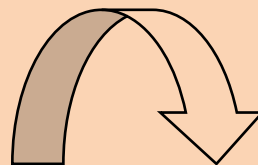
Con las expresiones matemáticas:

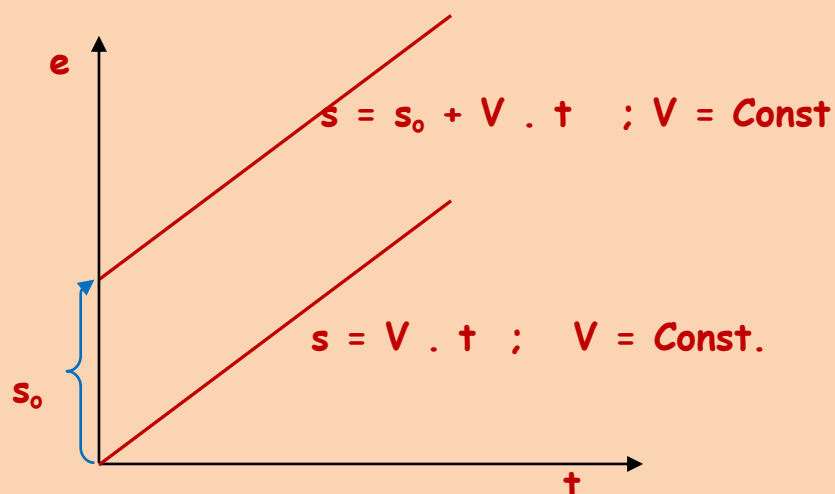
$y = 3 + 2x$ Ecuación de una **recta** con ordenada en el origen 3.

$y = 2x$ Ecuación de una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Por analogía con las ecuaciones matemáticas las ecuaciones (1) y (2) pertenecen a una recta.

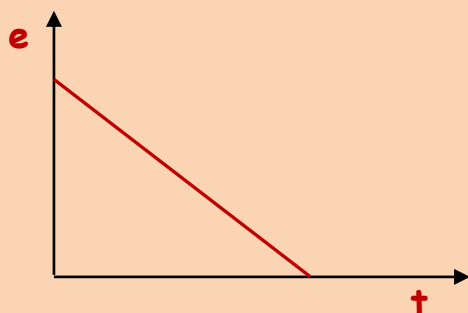
Si representamos las ecuaciones (1) y (2), nos quedaría:





Si se hubieran utilizados los datos correspondientes para la obtención de ambas rectas se llegaría a la conclusión: **En el M.R.U. a intervalos iguales de tiempo se recorren espacios iguales.**

También nos podemos encontrar con una gráfica del tipo:



En esta gráfica la **velocidad es negativa** y la interpretación de este hecho radica en que el móvil se está trasladando en sentido contrario al establecido. Es decir, el móvil regresa al punto de partida.

Gráfica e - t en M.R.U

<https://www.youtube.com/watch?v=7UPkgyMdahY>

Animación: Obtención gráficas $e - t$ en el M.R.U

<https://www.educaplus.org/game/movimiento-rectilineo-uniforme>

Gráficas $e - t$ en M.R.U

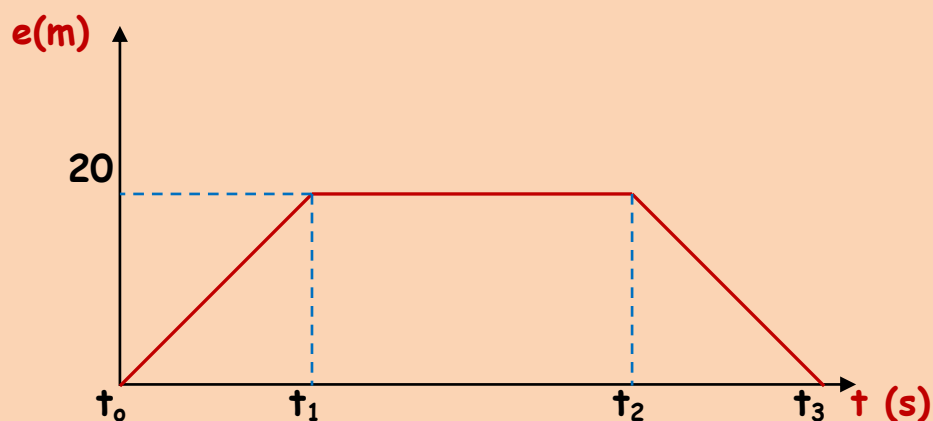
https://www.youtube.com/watch?v=W_OEiJxCcOU

Gráfica $V - t$ en M.R.U

<https://www.youtube.com/watch?v=rvrN5f8a2UM>

Ejercicio resuelto

Interpretar el movimiento que lleva un móvil cuya gráfica es:



Resolución

INTERVALO

TIPO DE MOVIMIENTO

$t_0 - t_1$

M.R.U. ($V = \text{Const}$)

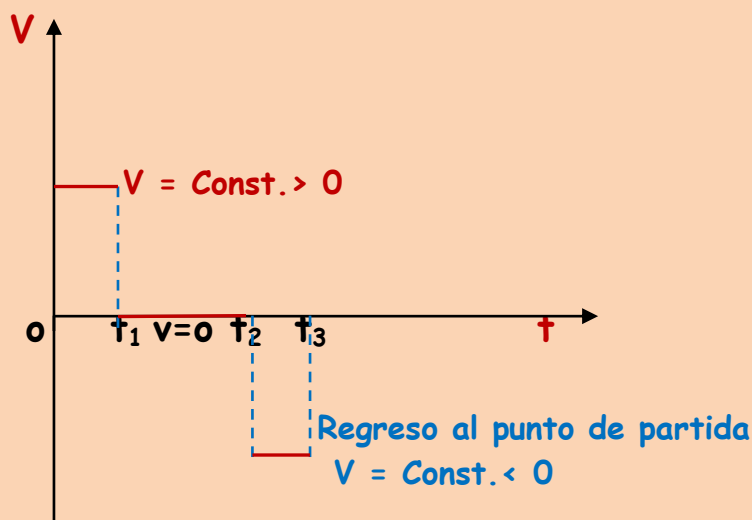
$t_1 - t_2$

No hay movimiento (en $t_1 - t_2$ la posición es de 20 m del punto de partida)

$t_2 - t_3$

M.R.U. ($V = \text{const} = \text{negativa}$, regresa al punto de partida)

En lo que se refiere a la representación **gráfica** ($v - t$) de la velocidad respecto al tiempo, teniendo presente que la $V = \text{const}$, nos quedaría de la forma:



Con la primera simulación podéis plantearos vuestros propios problemas y comprobarlos con el simulador

Simulación: Gráfica $e - t$ en M.R.U

http://www.educaplus.org/movi/3_3et1.html

Video: Problemas resueltos sobre M.R.U

<http://www.youtube.com/watch?v=TK6MEEdjwbk>

Problema resuelto

Un atleta corre los 100 m en 10 s y un nadador los nada en 54 s. Calcular las velocidades medias de cada uno.

Resolución

$$\text{Atleta} \rightarrow v_m = s_{\text{total}}/t_{\text{total}} = 100 \text{ m} / 10 \text{ s} = 10 \text{ m/s} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

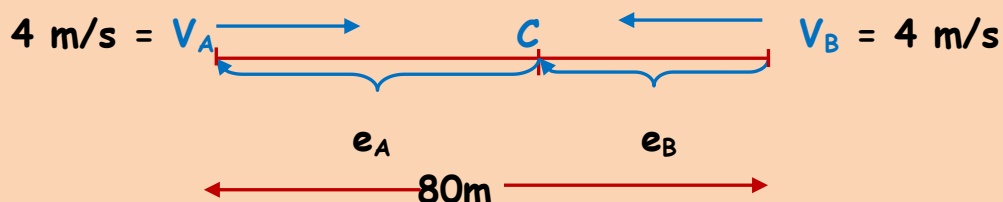
$$\text{Nadador} \rightarrow v_m = s_{\text{total}}/t_{\text{total}} = 100 \text{ m} / 54 \text{ s} = 1,85 \text{ m/s} = 1,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ejercicio resuelto

Sobre una recta se desplazan dos móviles con velocidad constante. El primer se desplaza hacia el segundo con velocidad de 4 m/s; el segundo sale hacia el primero 6 s más tarde y con la misma velocidad. Si la distancia que los separa inicialmente es de 80 m, ¿en qué instante se cruzarán?

Resolución

Los móviles llevan velocidad constante por lo que el movimiento es M.R.U. Esquema del movimiento:



El punto "C" es el punto de encuentro entre los dos móviles

Sabemos que:

$$V_A = V_B = 4 \text{ m/s}$$

$$t_B = t_A - 6$$

Recordemos que en el M.R.U:

$$V = e / t$$

Despejando el espacio:

$$e = V \cdot t$$

Según el esquema:

$$e_A + e_B = 80 \quad (1)$$

$$e_A = V_A \cdot t_A \quad (2)$$

$$e_B = V_B \cdot t_B \quad (3)$$

Llevamos las ecuaciones (2) y (3) la ecuación (1):

$$V_A \cdot t_A + V_B \cdot t_B = 80 \quad (4)$$

Recordemos que:

$$t_B = t_A - 6 \quad (5)$$

Llevamos (5) a (4):

$$V_A \cdot t_A + V_B (t_A - 6) = 80 \quad (6)$$

$$V_A = V_B = 4 \text{ m/s}$$

Con los datos anteriores nos vamos a la ecuación (6):

$$4 \cdot t_A + 4 \cdot (t_A - 6) = 80$$

$$4t_A + 4t_A - 24 = 80$$

$$8 t_A = 80 + 24$$

$$8 t_A = 104$$

$$t_A = 104/8 = 13 \text{ s (S.I.)}$$

Si nos vamos a la ecuación (5):

$$t_B = 13 - 6 = 7 \text{ s}$$

Con los valores del tiempo invertido por los dos móviles hasta encontrarse podemos conocer los espacios recorridos por los móviles:

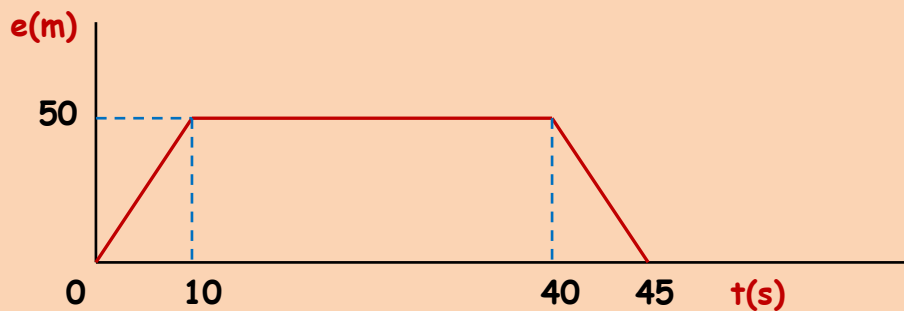
$$e_A = V_A \cdot t_A = 4 \text{ m/s} \cdot 13 \text{ s} = 52 \text{ m}$$

$$e_B = V_B \cdot t_B = 4 \text{ m/s} \cdot 7 \text{ s} = 28 \text{ m}$$

Los móviles se encuentran en el punto "C", es decir, a 52 m del punto de partida del móvil A o a 28 m del punto de partida del móvil B.

Problema resuelto

Interpretar la siguiente gráfica s/t y calcula la velocidad del móvil en cada tramo.



Resolución

La gráfica representa el movimiento de un cuerpo que tiene lugar en tres tramos:

Tramo I: M.R.U.

En 10 s recorre 50 m, por tanto:

$$V_1 = e/t = 50 \text{ m} / 10 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

Tramo II: el cuerpo permanece parado durante 30 s a 50 metros del origen. $V_2 = 0$ (permanece parado)

Tramo III: M.R.U.

El cuerpo regresa al origen en 5 s:

$$V_3 = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e_F - e_0}{\Delta t} = \frac{(0 - 50) \text{ m}}{5 \text{ s}} = \frac{- 50 \text{ m}}{5 \text{ s}} = - 10 \text{ m/s}$$

El **signo negativo** de V_3 nos indica que el móvil **vuelve al punto de partida** (V_1 y V_3 tienen la misma dirección pero sentidos opuestos).

Problema resuelto

Un coche se desplaza a una velocidad de 50 Km por hora. ¿Cuánto tardará en hacer un recorrido de 650 m?

Resolución**Unidades al S.I:**

CINEMÁTICA VECTORIAL

AUTOR: ANTONIO ZARAGOZA LÓPEZ www.quimiziencia.es

$$50 \frac{\cancel{\text{Km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{Km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 13,88 \text{ m/s}$$

Se trata de un M.R.U

Recordemos que:

$$V = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

De donde:

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{V} = \frac{650 \cancel{\text{m}}}{13,88 \cancel{\text{m/s}}} = 46,83 \text{ s}$$

Ejercicio resuelto

Una bicicleta recorre 60 Km en 2 horas. ¿Cuál es su velocidad?

Resolución

Unidades al S.I

$$e = 60 \cancel{\text{Km}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{Km}}} = 60000 \text{ m}$$

$$23 \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \cancel{\text{h}}} = 82800 \text{ s}$$

Se trata de un M.R.U

Recordemos:

$$V = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{60000 \text{ m}}{82800 \text{ s}} = 0,72 \text{ m/s}$$

Ejercicio resuelto

¿Cuánto tarda un coche que circula a 60 km/h en recorrer 15 km?

Resolución

Unidades al S.I:

$$60 \frac{\cancel{\text{Km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{Km}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{h}}}{3600 \text{ s}} = 16,66 \text{ m/s}$$

$$15 \cancel{\text{Km}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \cancel{\text{Km}}} = 15000 \text{ m}$$

Se trata de un **M.R.U**

Recordemos:

$$V = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

De donde:

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{V} = \frac{15000 \text{ m}}{16,66 \text{ m/s}} = 900,4 \text{ s}$$

Ejercicio resuelto

Dibuja la gráfica $e - t$ del movimiento de un coche que va a 15 m/s durante 10 minutos.

Resolución

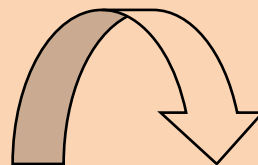
Debemos conocer las posiciones que ocupa el móvil en función del tiempo. Para ello utilizaremos la ecuación:

$$e = V \cdot t$$

Pasaremos primero los minutos a segundos:

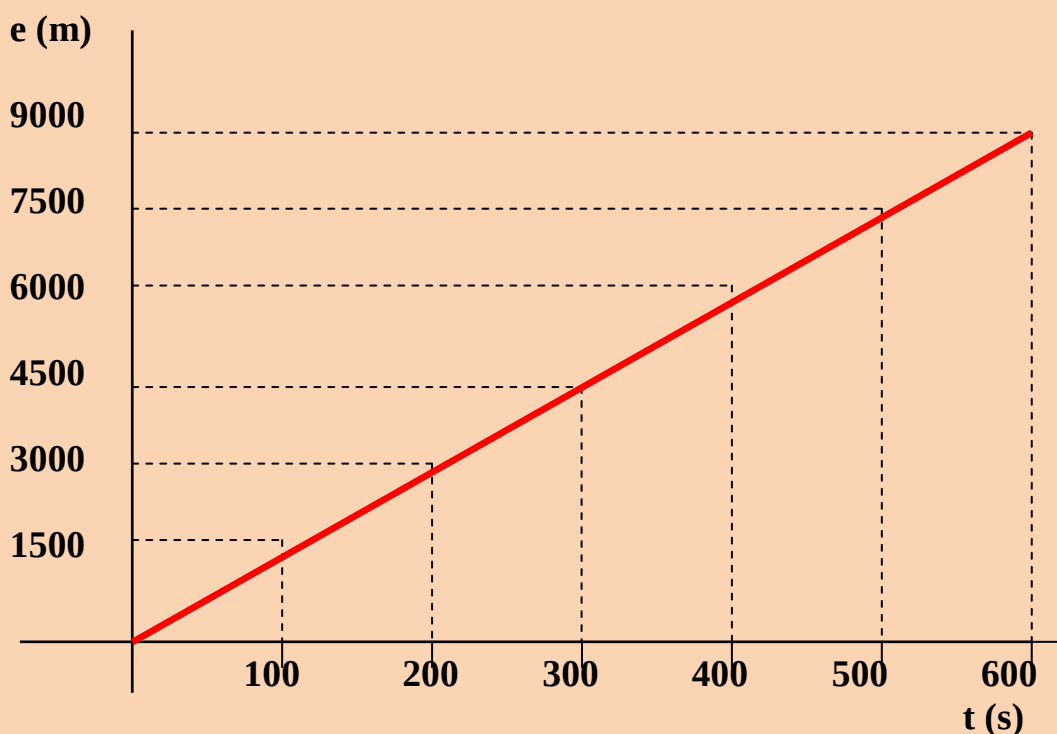
Unidades al S.I:

$$10 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 600 \text{ s}$$



Obtengamos la tabla de valores:

Velocidad (m/s)	15	15	15	15	15	15
Tiempo (s)	100	200	300	400	500	600
Posición (m)	1500	3000	4500	6000	7500	9000



Problema resuelto

Haz la gráfica espacio-tiempo y de un móvil que se desplaza con una velocidad constante de 3 m/s.

Resolución

Tenemos que establecer una tabla de valores en donde se refleje el espacio recorrido para un tiempo determinado. Se trata de un M.R.U. La ecuación para conocer el espacio es:

$$e = e_0 + V \cdot t$$

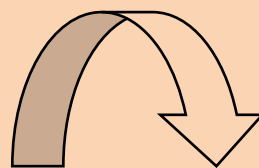
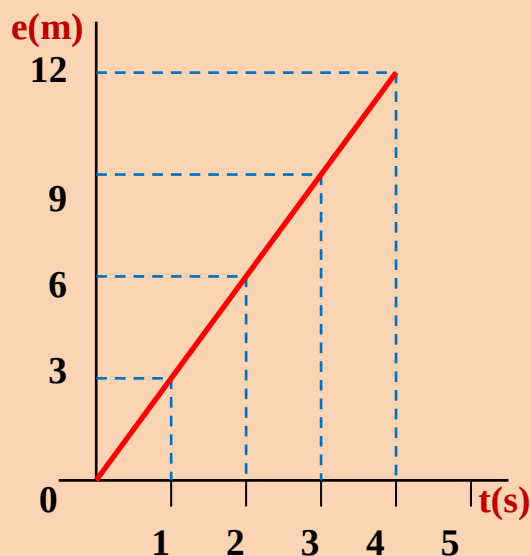
Supondremos que el origen de los tiempos coincide con el origen de los espacios; es decir; $t_0 = 0$; $e_0 = 0$. La ecuación anterior nos quedaría de la forma:

$$e = V \cdot t$$

La tabla quedaría de la forma:

Tiempo (s)	0	1	2	3	4
Espacio (m)	0	3	6	9	12

La gráfica $e - t$:



Ejercicio resuelto

Un coche sale de Ayalde hacia Bilbao a 54 km/h de velocidad constante. Al mismo tiempo sale desde Bilbao hacia Ayalde otro coche a velocidad constante de 72 km/h. Si entre Bilbao y Ayalde hay 8 km ¿A qué distancia de Bilbao se encontrarían? Resuelve el problema gráficamente.

Resolución

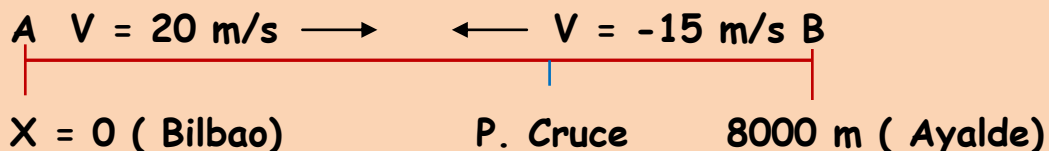
Pasaremos todas las unidades al Sistema Internacional:

$$54 \text{ Km/h} \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 15 \text{ m/s} = 15 \text{ m.s}^{-1}$$

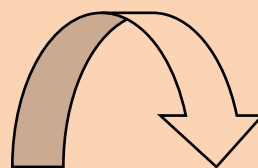
$$(72 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 20 \text{ m/s} = 20 \text{ m.s}^{-1}$$

$$(8 \text{ Km}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) = 8000 \text{ m}$$

Establezcamos el Sistema de Referencia:



El problema debemos resolverlo gráficamente. El movimiento de los dos móviles es **M.R.U**, las gráficas **e - t** serán dos líneas rectas que se cortarán en un punto que es precisamente el punto de cruce de los dos móviles.



Para calcular las dos gráficas procederemos:

- a) Calcularemos el tiempo que tarda A en recorrer los 8000 m (e_A)

Móvil A

$$e_{0A} = 0$$

$$V_A = 20 \text{ m/s}$$

$$e_A = e_{0A} + V_A \cdot t_A$$

$$e_{0A} = 0$$

$$e_A = V_A \cdot t_A$$

$$e_A = 20 \cdot t_A$$

$$t_A = e_A / 20 \text{ m/s} = 8000 \text{ m} / (20 \text{ m/s}) = 400 \text{ s}$$

- b) Calcularemos el tiempo que tarda el móvil B en llegar al Sistema de Referencia ($X = 0$)

Móvil B

$$e_B = 0$$

$$V_B = -15 \text{ m/s}$$

$$e_{0B} = 8000 \text{ m}$$

$$e_B = e_{0B} + V_B \cdot t_B$$

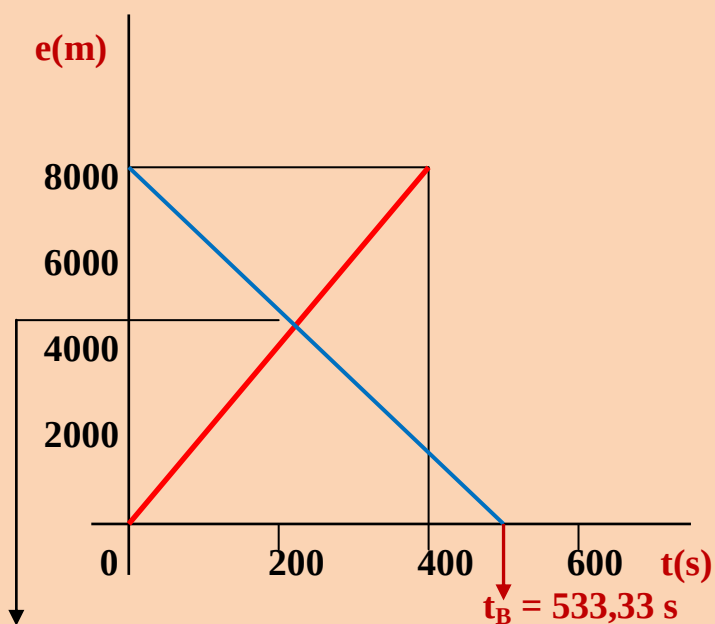
$$0 = 8000 + (-15) \cdot t_B$$

$$15 t_B = 8000$$

$$t_B = 8000 \text{ m} / (15 \text{ m/s})$$

$$t_B = 533,33 \text{ s}$$

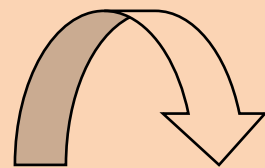
Vamos a confeccionar la gráfica $e - t$, que servirá para los dos móviles:



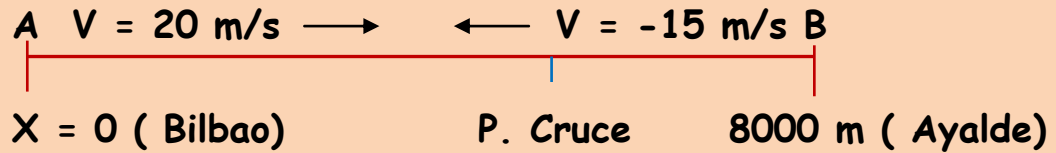
Punto de cruce que yo le daría un valor entre **4500 m - 5000 m**.

La gráfica no es muy exacta y no podemos precisar el punto de cruce.

Vamos a resolverlo numéricamente y veremos si la aproximación realizada es correcta.



Volvemos al croquis inicial:



Móvil A

$$e_{0A} = 0$$

$$V_A = 20 \text{ m/s}$$

$$e_A = \text{punto de cruce}$$

Vamos a calcular el tiempo que tarda A en llegar al punto de cruce:

$$e_A = e_{0A} + V_A \cdot t_A$$

$$e_A = 0 + 20 \cdot t_A$$

$$t_A = e_A / 20 \quad (1)$$

El tiempo que tarda B en llegar al punto de cruce (e_A), será:

$$e_B = e_{0B} + V_B \cdot t_B$$

e_B coincidirá con la posición e_A ($e_A = e_B$), luego:

$$e_A = e_{0B} + V_B \cdot t_B$$

$$e_A = 8000 + (-15) \cdot t_B$$

$$15 t_B = 8000 - e_A$$

$$t_B = (8000 - e_A) / 15 \quad (2)$$

Los tiempos t_A y t_B son iguales ($t_A = t_B$) por lo que igualando (1) y (2)

$$e_A / 20 = (8000 - e_A) / 15$$

$$15 \cdot e_A = 20 \cdot (8000 - e_A)$$

$$15 e_A = 160000 - 20 e_A$$

$$15 e_A + 20 e_A = 160000$$

$$35 e_A = 160000$$

$$e_A = 160000 / 35 = 4571,43 \text{ m}$$

Problema resuelto

Dos coches, A y B, parten al encuentro desde dos ciudades separadas por una distancia de 100 km. Si el primero viaja a una velocidad de 70 km/h y el segundo a 50 km/h en sentido contrario a A, calcula en qué lugar e instante se encuentran.

Resolución

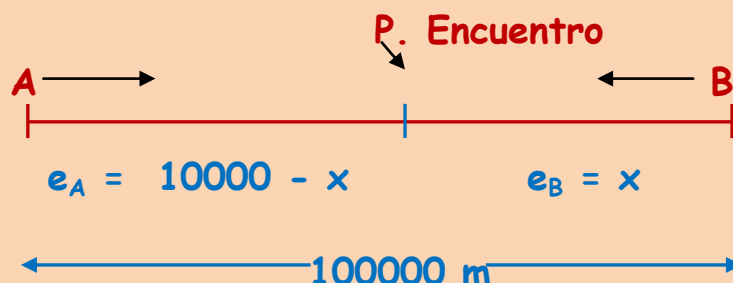
Cambios de unidades al S.I.:

$$V_A = (70 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 19,44 \text{ m/s}$$

$$V_B = (50 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 13,88 \text{ m/s}$$

$$e = (100 \text{ Km}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) = 100000 \text{ m}$$

Como el móvil A lleva más velocidad que el B el punto de encuentro estará más cerca del punto de partida de B. El croquis de la experiencia es:



A y B llevan velocidad constante lo que implica que sus movimientos son **U.R.U.** en donde:

$$e = V \cdot t \quad (1)$$

La clave del problema reside en el hecho de que al partir simultáneamente el uno hacia el otro, el tiempo empleado por A en recorrer el e_A es el mismo que el tiempo en recorrer e_B :

$$t_A = t_B$$

De (1) podemos deducir:

$$t = e / V$$

$$t_A = e_A / V_A$$

$$t_B = e_B / V_B$$

$$t_A = t_B$$

$$e_A / V_A = e_B / V_B$$

$$(100000 - x) / 19,44 = x / 13,88$$

$$13,88 \cdot (100000 - x) = 19,44 \cdot x$$

$$1388000 - 13,88 x = 19,44 x$$

$$1388000 = 19,44 x + 13,88 x$$

$$1388000 = 33,32 x$$

$$x = 1388000 / 33,32 = 41656,66 \text{ m}$$

$$x = (41656,55 \text{ m}) \cdot (1 \text{ Km} / 1000 \text{ m}) = 41,65 \text{ Km}$$

Se encontrarán a **41,65 Km** del punto de partida de B.

Ejercicio resuelto

Supón ahora que los coches mencionados en el ejercicio anterior, parten uno tras el otro (el más rápido persiguiendo al más lento). Calcula el lugar y el instante en que el coche A alcanza a B.

Resolución

Primero pasaremos las unidades al S.I:

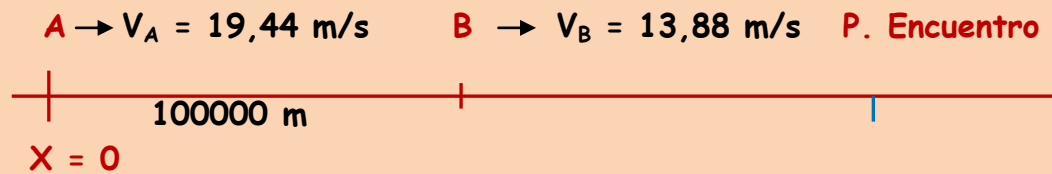
Operaciones en el problema anterior

$$V_A = 19,44 \text{ m/s} = 19,44 \text{ m.s}^{-1}$$

$$V_B = 13,88 \text{ m/s} = 13,88 \text{ m.s}^{-1}$$

$$(100 \text{ Km}) \cdot (1000 \text{ m} / \text{Km}) = 100000 \text{ m}$$

Establezcamos el Sistema de Referencia:



Móvil A

$$e_{0A} = 0$$

$$V_A = 19,44 \text{ m/s}$$

$$e_{AP} = \text{espacio hasta P. Encuentro}$$

$$e_A = e_{0A} + V_A \cdot t_A$$

$$e_A = 19,44 \cdot t_A$$

$$t_A = e_{AP} / 19,44 \quad (1)$$

Móvil B

$$e_{0B} = 100000 \text{ m}$$

$$V_B = 13,88 \text{ m/s} ; e_{BP} = ?$$

$$e_{BP} = e_{0B} + V_B \cdot t_B$$

$$e_{BP} = 100000 + 13,88 \cdot t_B$$

$$e_{BP} - 100000 = 13,88 \cdot t_B$$

$$t_B = (e_{BP} - 100000) / 13,88 \quad (2)$$

Los tiempos que están en movimiento los dos móviles hasta llegar a P es el mismo, luego podemos igualar las ecuaciones (1) y (2):

$$e_{AP} / 19,44 = (e_{BP} - 100000) / 13,88$$

Por otra parte sabemos, según el croquis, que:

$$e_{AP} = 100000 + e_{BP}$$

Lo que nos permite escribir:

$$(100000 + e_{BP}) / 19,44 = (e_{BP} - 100000) / 13,88$$

$$13,88 \cdot (100000 + e_{BP}) = 19,44 (e_{BP} - 100000)$$

$$1388000 + 13,88 e_{BP} = 19,44 e_{BP} - 1944000$$

$$1388000 + 1944000 = 19,44 e_{BP} - 13,88 e_{BP}$$

$$3332000 = 5,56 e_{BP}$$

$$e_{BP} = 3332000 / 5,56 = 599280,57 \text{ m}$$

Se en encontrarán a **599280,57 m** de B o bien a:

$$e_{AP} = 100000 + 599280,57 = 699280,57 \text{ m de A}$$

El tiempo empleado, según dijimos era el mismo para los dos móviles. Comprobémoslo:

$$t_A = 699280,57 \text{ m} / (19,44 \text{ m/s}) = 35971,22 \text{ s}$$

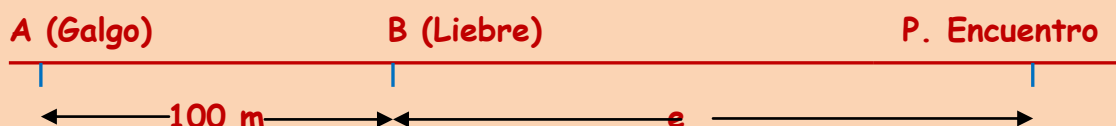
$$t_B = 599280,57 - 100000 / 13,88 = 35971,22 \text{ s}$$

Ejercicio resuelto

Un galgo persigue a una liebre que le aventaja en 100 m. Si la velocidad de la liebre es de 15 m/s y la del galgo de 72 km/h ¿cuánto tardará en alcanzarla? ¿cuánta distancia necesitó el galgo para ello?

Resolución

Fundamental el croquis del problema:



Magnitudes:

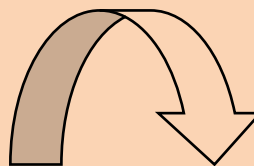
$$V_{\text{liebre}} = 15 \text{ m/s}$$

$$V_{\text{Galgo}} = (72 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 20 \text{ m/s}$$

La clave del problema se encuentra en el hecho de que el tiempo que tarda la liebre en recorrer "e" m. es el mismo que el que tarda el galgo en recorrer (100 + e).

Tanto la liebre como el galgo llevan **M.R.U.** y por tanto:

$$e = e_0 + v \cdot t$$



Tanto para la liebre como para el galgo $v_0 = 0$, quedándonos:

$$e = v \cdot t$$

Liebre

$$e = (15 \text{ m/s}) \cdot t \quad (1)$$

Galgo

$$100 + e = 20 \cdot t \quad (2)$$

Despejamos de (1) el tiempo:

$$t = e / 15$$

Lo llevamos a (2):

$$100 + e = 20 \cdot e/15$$

Resolviendo la ecuación conoceremos el punto de encuentro:

$$1500 + 15 e = 20 e$$

$$1500 = 20 e - 15 e$$

$$1500 = 5 e$$

$$e = 1500 / 5 = 300 \text{ m}$$

El punto de encuentro está situado a **300 m de la liebre** o a **(100 + 300) m** del galgo.

En cuanto al tiempo de encuentro, trabajaremos con la liebre y con el galgo y lógicamente será el **mismo** puesto que era nuestra la base del desarrollo del ejercicio.

Liebre

$$e = v \cdot t$$

$$t = e / v$$

$$t = 300 \text{ m} / 15 \text{ m/s} = 20 \text{ s}$$

Galgo

$$e = v \cdot t$$

$$t = e / v$$

$$t = 400 \text{ m} / 20 \text{ m/s} = 20 \text{ s}$$

Ejercicio resuelto

La siguiente tabla:

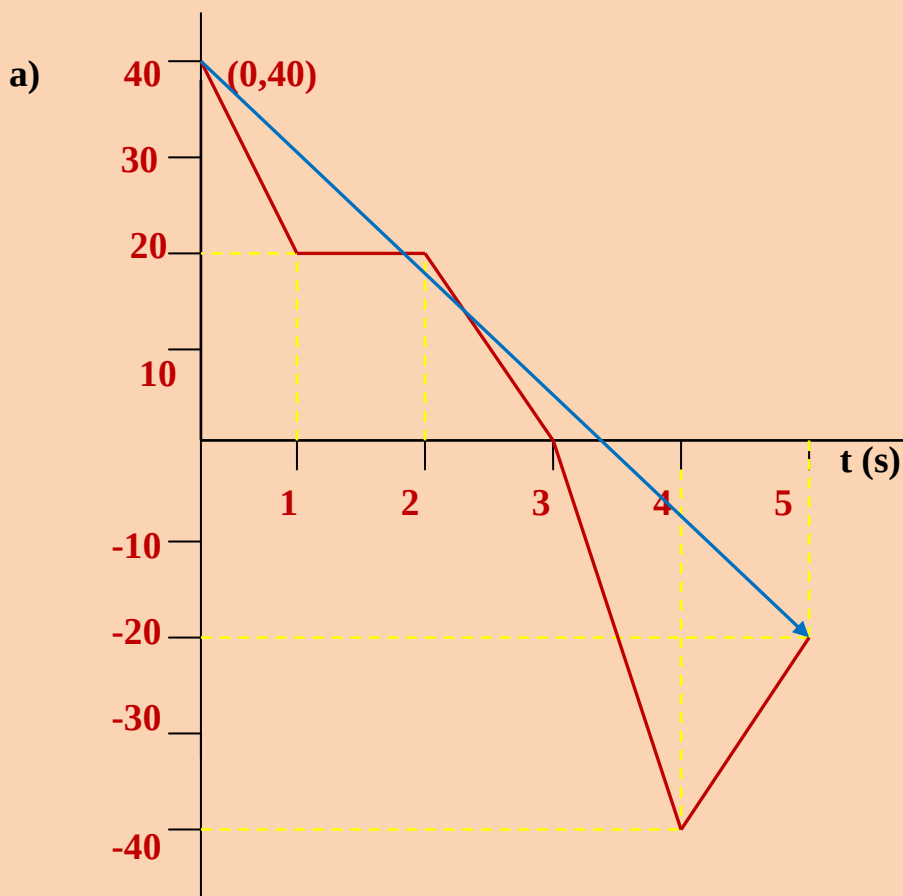
TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5	–
ESPACIO (Km)	40	20	20	0	-40	-20	–

Nace del estudio de un movimiento. Suponiendo que en cada tramo el cuerpo mantiene la velocidad constante:

- Dibuja la gráfica $s - t$ del movimiento.
- ¿Cuál es la posición inicial del móvil?
- ¿Entre qué instantes se desplaza hacia la derecha?.
- ¿Entre que instantes se desplaza hacia la izquierda?

e) Calcula el desplazamiento total y el espacio recorrido.

Resolución



c) El punto (0,40)

c) y d)

La respuesta a esta cuestión depende del criterio que se haya tomado. Tomaremos el siguiente: Regresando al punto de referencia → Derecha, alejándonos del punto de referencia → Izquierda.

En base a este criterio el cuerpo se moverá:

[0 - 1] → Derecha

[1 - 2] → No se mueve

[2 - 3] → Llegamos al punto o sistema de referencia

[3 - 4] → Izquierda

[4 - 5] → Izquierda

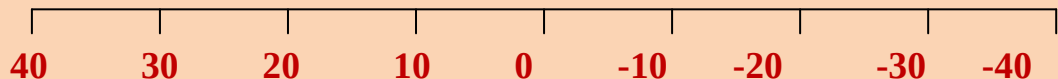
e)

Debemos recordar los conceptos de "espacio" y "desplazamiento".

Espacio .- Longitud correspondiente a la trayectoria.

Desplazamiento .- Es el módulo del vector que une el punto de partida con el punto de llegada.

En línea recta:



El cuerpo, según nuestro criterio, regresa al sistema de Referencia y luego se aleja hasta la posición dada por el punto (4, -40) y retrocede a la posición (5 , -20). El espacio total recorrido es:

$$e_{\text{t}} = 40 + 40 + 20 = 100 \text{ m}$$

El vector desplazamiento tiene por salida el punto (0,40) y el punto de llegada (5,-20). Las componentes del vector desplazamiento serán:

$$\vec{d} [(5 - 0) , (-20 - 40)]$$

$$\vec{d} (5 , -60)$$

$$|\vec{d}| = (5^2 + (-60)^2)^{1/2} = (25 + 3600)^{1/2} = 60,20 \text{ m}$$

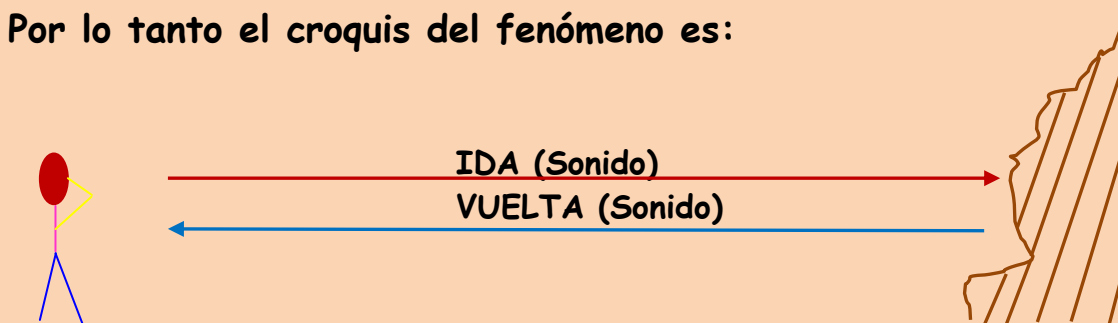
Ejercicio resuelto

Un excursionista, de pie ante una montaña, tarda 1,4 s en oír el eco de su voz. Sabiendo que el sonido viaja en el aire a velocidad constante de $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, calcula a qué distancia está de la montaña.

Resolución

El eco es un efecto acústico producido cuando la onda se refleja y vuelve al punto emisor del sonido.

Por lo tanto el croquis del fenómeno es:



Se cumple:

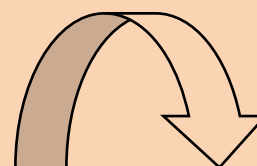
$$t_{ida} + t_{vuelta} = 1,4$$

Como el sonido se traslada con Movimiento Uniforme:

$$e_t = V_{sonido} \cdot t_t$$

Luego:

$$e_t = 340 \text{ m/s} \cdot 1,4 \text{ s} = 476 \text{ m}$$



Como el camino de ida tiene la misma distancia que el de vuelta, el señor que pega el grito debe estar a la mitad de la distancia total, es decir:

$$e_{\text{persona}} = 475 \text{ m} / 2 = 238 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto

Dos corredores A y B parten de un mismo punto. A sale 30 s antes que B con una velocidad constante de 4,2 m/s. B alcanza a A después de haber recorrido 48 s a velocidad también constante. Determina la velocidad de B y la distancia al punto de partida le da el alcance.

Resolución

$$V_A = 4,2 \text{ m/s}$$

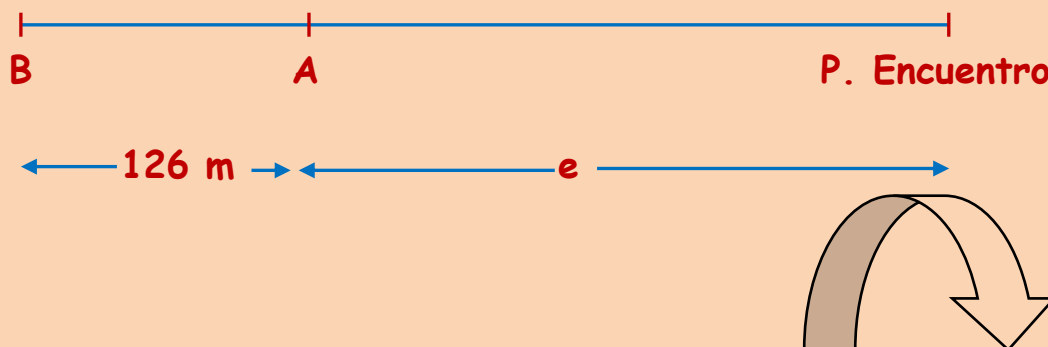
$$V_B = ?$$

En los 30 s iniciales **A** ha recorrido un espacio de:

$$e_A = V_A \cdot t$$

$$e_A = 4,2 \text{ m/s} \cdot 30 \text{ s} = 126 \text{ m}$$

La situación es la siguiente:



El tiempo que tarda en ir **A** al **P. de Encuentro** es el mismo que el que tarda **B** en recorrer **(126 + e) m**

$$t_A = e/v \quad (1)$$

$$t_B = (126 + e)/V_B \quad (2)$$

$$t_A = t_B = 48 \text{ s}$$

De (1):

$$48 \text{ s} = e / (4,2 \text{ m/s})$$

$$e = 48 \text{ s} \cdot 4,2 \text{ m/s} = 201,6 \text{ m}$$

Llevado el valor de "**e**" a (2):

$$48 \text{ s} = (126 + 201,5) / V_B$$

$$V_B = (126 + 201,5) \text{ m} / 46 \text{ s}$$

$$V_B = 327,5 \text{ m} / 48 \text{ s} = 6,8 \text{ m/s}$$

Ejercicio resuelto

Un club de maratón ha decidido reorganizar la hora de salida de los componentes de la prueba de forma que todos lleguen a la vez a la meta. El campeón corre a 20 Km/h y el más lento a 9,5 Km/h. ¿Cuánto tiempo, en segundos, tendrá que salir antes el corredor más lento que el campeón para llegar a la meta, a 42,195 Km, a la vez?

Resolución

En esta experiencia todos los corredores recorren la **misma distancia**. Como la meta se encuentra a 42,195 Km, el corredor más rápido tardará en recorrer ese espacio:

$$42,195 \text{ Km} \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) = 42195 \text{ m}$$

$$(20 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 5,55 \text{ m/s}$$

$$e = V \cdot t$$

$$42195 \text{ m} = 5,55 \text{ m/s} \cdot t$$

$$t = 42195 \text{ m} / (5,55 \text{ m/s})$$

$$t_{\text{campeón}} = 7602,70 \text{ s}$$

Para el corredor más lento:

$$V = (9,5 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}) \cdot (1 \text{ h} / 3600 \text{ s}) = 2,63 \text{ m/s}$$

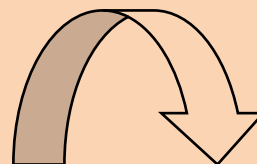
El corredor más lento consumiría:

$$t = e / V$$

$$t_{\text{lento}} = 42195 \text{ m} / (2,63 \text{ m/s}) = 16043,72 \text{ s} \text{ (para llegar a la meta)}$$

El corredor más lento tarda:

$$t_{\text{lento}} = 16043,72 - 7602,70 = 8441,02 \text{ s} \text{ (más que el campeón)}$$



El corredor lento deberá salir 8441,02 s antes que el campeón, equivalentes a:

$$8441,02 \cancel{\text{ s}} \cdot (1 \text{ h} / 3600 \cancel{\text{ s}}) = 2,34 \text{ h}$$

5.- Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (M.R.U.A).

Movimiento Uniformemente Acelerado

<http://es.scribd.com/doc/20701244/MRUA>

Movimiento Uniformemente Acelerado

<http://conociendolafisica.files.wordpress.com/2010/04/7mrua.pdf>

Video: M.R.U.A

<http://www.youtube.com/watch?v=PaUhVDR66VA>

Video: Resolución de un problema grafica y analíticamente

<http://www.youtube.com/watch?v=6A7MRVUT8SE&feature=related>

Sus características:

- a) **Trayectoria** Rectilínea.
- b) Existe " $\vec{a}_t$ " puesto que se produce una variación **UNIFORME** del módulo de la velocidad.
- c) No existe " $\vec{a}_n$ " por las mismas razones que en M.R.U.

Las ecuaciones del **M.R.U.A.** son:

Dijimos que existía " $\vec{a}_t$ " y es la única que existe, podemos escribir:

$$\vec{a} = d | \vec{V} | / dt$$

$$d | \vec{V} | = a . dt$$

Si integramos los dos miembros de la ecuación:

$$\int d | V | = \int a . dt$$

$$\int d | V | = a \int dt$$

$$V = a . t + C$$

Para determinar las características de " C " nos iremos al origen de los tiempos, es decir, a $t = 0$:

$$V = a . t + C$$

$$V = a . 0 + C$$

$$V = C$$

Observamos que " C " tiene las características de una **velocidad**, concretamente la velocidad inicial que lleva el móvil (V_0). Podemos llegar a la conclusión:

$$V = V_0 + a . t \quad (1)$$

Expresión totalmente semejante a la ecuación de una recta:

$$y = ax + b$$

En donde "a" es una constante y "b" la ordenada en el origen.

En la ecuación (1) "a" corresponde a la **Aceleración** y que matemáticamente **es constante** lo que nos **constata que la aceleración es Constante en el M.R.U.A** (el módulo de la velocidad varía de forma uniforme).

De la ecuación (1) podemos despejar la Aceleración y nos queda:

$$V_f = V_o + a \cdot t$$

$$a = (V_f - V_o) / t$$

Si en la ecuación (1) hacemos que **$V_o = 0$** , es decir, partimos del reposo, dicha ecuación se transforma en:

$$V = a \cdot t$$

En lo referente al espacio recorrido en este tipo de movimiento tenemos que recordar que se trata de un movimiento **rectilíneo** y que por lo tanto el desplazamiento es igual al **espacio recorrido**:

$$|\Delta \vec{r}| = \Delta s$$

Podemos entonces escribir que:

$$V = ds / dt$$

De donde:

$$ds = V dt$$

Como:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

$$ds = (V_0 + a \cdot t) \cdot dt$$

$$ds = V_0 \cdot dt + a \cdot t \cdot dt$$

Si integramos ambos miembros:

$$\int ds = \int V_0 \cdot dt + \int a \cdot t \cdot dt$$

Podemos sacar las constantes del signo de integración:

$$\int ds = V_0 \int dt + a \int t \cdot dt$$

Quedando:

$$s = V_0 \cdot t + a t^2/2 + C$$

$$s = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + C$$

De nuevo, para conocer la naturaleza de "C" haremos $t = 0$:

$$S = V_0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0 + C$$

$$S = C$$

La constante de integración tiene las características de un **espacio**, **espacio inicial** (s_0) puesto que $t = 0$.

Nos queda la ecuación:

$$s = s_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

En la ecuación (2) podemos suponer que no existe espacio inicial recorrido por el móvil ($s_0 = 0$):

$$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Podemos suponer que partimos del reposo ($V_0 = 0$):

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Si trabajamos, conjuntamente, con las ecuaciones:

$$a = V_f - V_0 / t \quad (3)$$

$$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (4)$$

Despejando " t " de (3)

$$t = (V_f - V_0 / a)$$

Llevándolo a (4):

$$S = V_0 \cdot (V_f - V_0) / a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (V_f - V_0)^2 / a^2$$

$$S = V_0 \cdot (V_f - V_0) / a + (V_f - V_0)^2 / 2 a$$

$$2 \cdot a \cdot S = 2 \cdot V_o \cdot (V_f - V_o) + (V_f - V_o)^2$$

$$2 \cdot a \cdot S = 2 V_o V_f - 2 V_o^2 + V_f^2 + V_o^2 - 2 V_o V_f$$

$$2 \cdot a \cdot S = - V_o^2 + V_f^2$$

$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot s \quad (5)$$

Si suponemos que partimos del reposo, $V_o = 0$, la ecuación (5) queda de la forma:

$$V_f^2 = 0 + 2 \cdot a \cdot S$$

$$V_f = (2 \cdot a \cdot s)^{1/2}$$

Hemos obtenido el conjunto de ecuaciones del **M.R.U.A.**

Podemos realizar un cuadro resumen:

<u>ECUACIÓN GENERAL</u>	<u>CONDICIÓN</u>	<u>CONDICIÓN</u>
	$S_o = 0$	$V_o = 0$
$V_f = V_o + a \cdot t$	$V_f = V_o + a \cdot t$	$V_f = a \cdot t$
$a = V_f - V_o / t$	$a = V_f - V_o / t$	$a = V_f / t$
$S = S_o + V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$S = V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$
$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot S$	$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot S$	$V_f^2 = 2 \cdot a \cdot S$

A pesar de haber realizado un cuadro resumen de fórmulas es importante la siguiente puntualización: **No debemos de aprender de memoria todas las ecuaciones. Aprenderemos la**

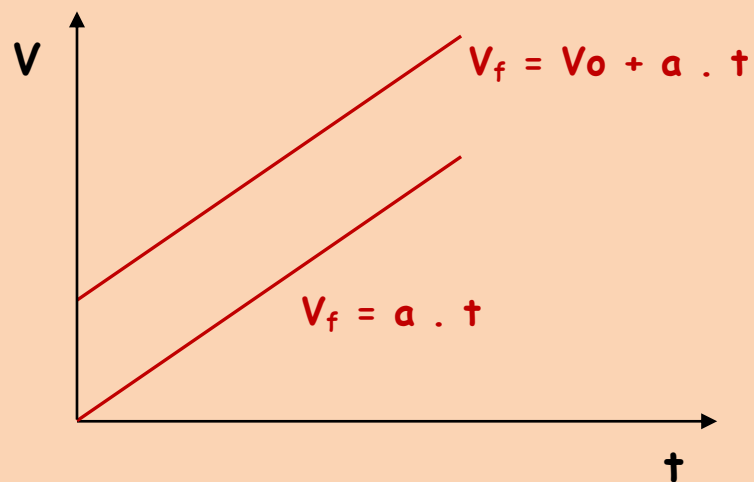
ecuación general y le iremos aplicando las condiciones que el ejercicio nos imponga.

Simulador: Estudio gráfico del movimiento del M.R.U.A

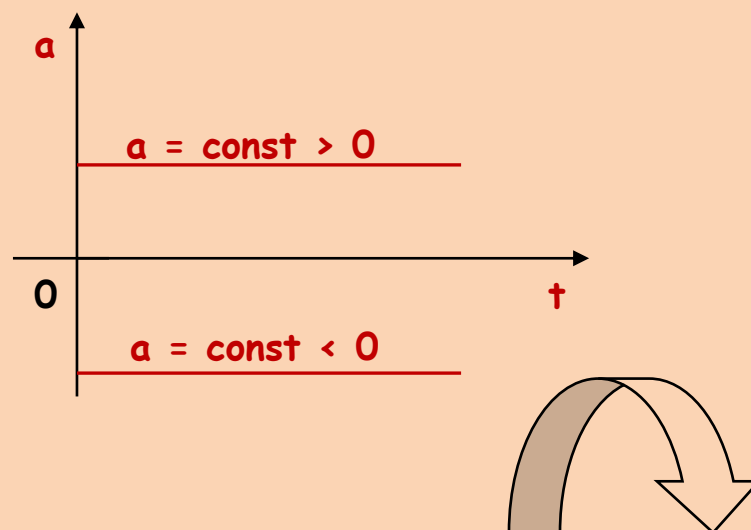
http://www.educaplus.org/movi/3_3et1.html

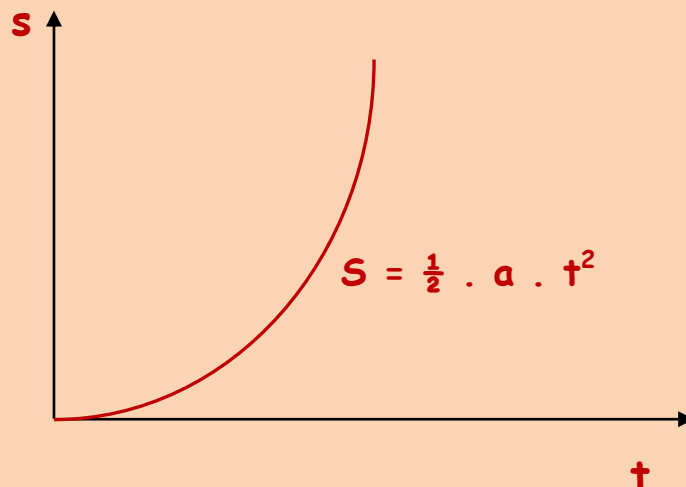
5.1.- Estudio gráfico del M.R.U.A

Gráficas V - t:



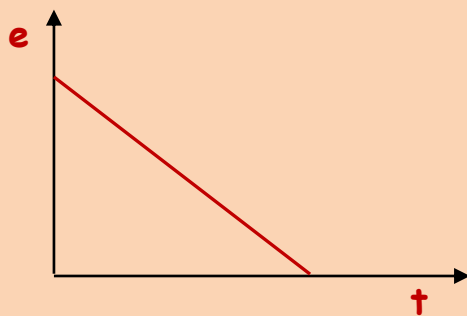
Gráfica a - t:



Gráfica S - t:

Si tuviéramos la tabla de datos que nos ha permitido realizar la gráfica anterior observaríamos que en este movimiento no se cumple la condición de que a **intervalos iguales de tiempo se recorren espacios iguales**.

Cuando se estudió el M.R.U. se vio la posibilidad de que la velocidad fuera negativa:



El signo negativo de la velocidad implicaba únicamente un **cambio de sentido** en el movimiento del móvil.

Como hemos visto en la gráfica correspondiente la aceleración también puede ser **negativa**. Pero las implicaciones cinemáticas son mucho más significativas que en el caso de la velocidad. Vamos a demostrarlo.

Sabemos que:

$$a = V_f - V_o / t$$

Si "a" es **positiva** ($a > 0$):

$$a = V_f - V_o / t > 0$$

Como $t > 0$ (denominador siempre positivo) el numerador también debe ser positivo:

$$V_f - V_o > 0 \rightarrow V_f > V_o$$

La **velocidad final** es mayor que la **inicial**. El móvil **aumenta de velocidad**.

Si "a" es **negativa**:

$$a = V_f - V_o / t < 0$$

Como el tiempo es siempre positivo es obligatorio que el **numerador sea negativo**:

$$V_f - V_o < 0 \rightarrow V_f < V_o$$

La **velocidad final** es menor que la **velocidad inicial**. El móvil **disminuye de velocidad**.

Ejercicio resuelto

Un vehículo parte del reposo y alcanza los 10 m/s en 5 s.
Calcula:

- La aceleración del vehículo durante ese tiempo.
- El espacio recorrido.

Resolución

a)

$$V_o = 0$$

$$V_f = 10 \text{ m/s}$$

$$t = 5 \text{ s} \rightarrow \text{El móvil lleva M.R.U.A}$$

$$a = V_f - V_o / t$$

$$a = (10 - 0) \text{ (m/s)} / 5 \text{ s} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 2 \text{ m/s}^2$$

b)

$$e = e_o + V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (1)$$

No existe espacio inicial y la $V_o = 0$

La ecuación (1) queda de la forma:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

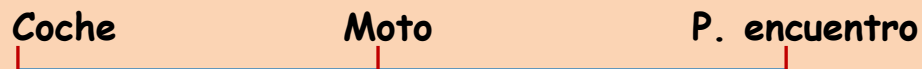
Llevamos datos a la ecuación (2):

$$e = \frac{1}{2} \cdot (2 \text{ m/s}^2) \cdot (25 \text{ s}^2) = 25 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto

Un coche eléctrico circula a velocidad constante de 60 Km/h. Cuando pasa por mi lado arranco la moto y, partiendo del reposo, alcanzo al coche en 5 s (supuesta la aceleración constante). ¿Cuál es la aceleración de mi moto?.

Resolución



El coche lleva **M.R.U.**, luego:

$$e_{\text{coche}} = V \cdot t \quad (1)$$

Cambio de unidades al S.I.

$$V = (60 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 16,66 \text{ m/s}$$

En el tiempo:

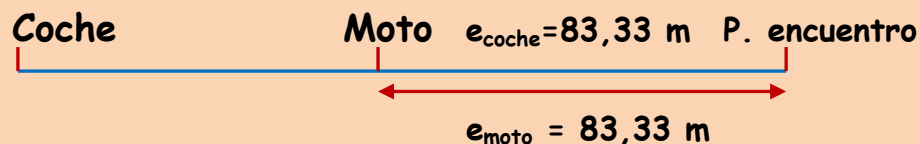
$$t = 5 \text{ s}$$

El coche recorre un espacio dado por la ecuación (1):

$$e_{\text{coche}} = V \cdot t \quad (1)$$

$$e_{\text{coche}} = 16,66 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 83,33 \text{ m}$$

Este es el espacio que debe recorrer la moto para alcanzar al coche. La moto lleva **M.R.U.A.** puesto que parte del reposo:



Conociendo el espacio a recorrer por la moto, así como el tiempo invertido hasta el encuentro, la aceleración que lleva la moto la podemos conocer por la ecuación:

$$e = e_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (1)$$

Para la moto $e_0 = 0$ y $V_0 = 0$ por lo que la ecuación (1) queda de la forma:

$$e = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

La ecuación (2) se reduce a:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

Llevamos datos a la ecuación (2):

$$83,33 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 25 \quad ; \quad 83,33 = 12,5 a$$

$$a = 83,33 / 12,5 = 6,66 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio resuelto

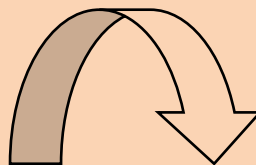
Un cuerpo, partiendo del reposo, se mueve con una aceleración constante de 8 m/s^2 . ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 100 m? ¿Cuál será su velocidad en ese instante?

Resolución

Parte del reposo luego $V_0 = 0$

$$a = 8 \text{ m/s}^2$$

$$e = 100 \text{ m}$$



Al existir aceleración constante estamos hablando de un **M.R.U.A.** Sus ecuaciones son:

Cálculo del tiempo:

Con los datos que tenemos la ecuación a utilizar es:

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$V_0 = 0$$

$$e = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Sustituimos los datos:

$$100 = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot t^2$$

$$100 = 4 \cdot t^2$$

$$t = (100/4)^{1/2}$$

$$t = (25)^{1/2}$$

$$t = 5 \text{ s (Trabajamos en el S.I)}$$

La velocidad alcanzada:

$$V_f = V_0 + a \cdot t$$

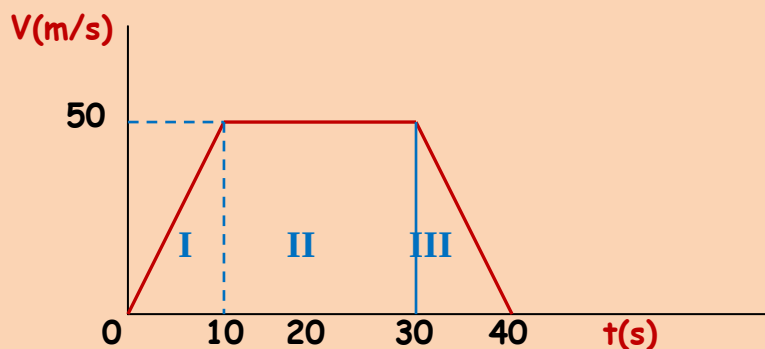
$$V = 0 + 8 \cdot t$$

$$v = 8t$$

$$v = 8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ s} = 40 \text{ m/s}$$

Ejercicio resuelto

Interpreta la siguiente gráfica v/t. ¿Cuál es el desplazamiento total recorrido por el móvil?



Se trata de una gráfica en tres tramos.

Tramo I:

M.R.U.A. de aceleración positiva ya que aumenta la velocidad. Su aceleración es:

$$a = (v_f - v_0)/t = (50 - 0)/10 = 5 \text{ m/s}^2 \text{ (Unidades en el S.I.)}$$

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$s = 0 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 = 250 \text{ m}$$

Tramo II:

M.R.U. ya que se mantiene constante la velocidad durante 20 s. El espacio recorrido es:

$$e = V \cdot t = 50 \text{ m/s} \cdot 20 \text{ s} = 1000 \text{ m}$$

Tramo III:

M.R.U.A. con aceleración negativa al disminuir la velocidad.

Su valor:

$$a = (v_f - v_0)/t = (0 - 50)/10 = -5 \text{ m/s}^2$$

$$e = 50 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-5) \cdot 10^2 = 250 \text{ m}$$

Sumando los espacios obtenidos en los tres tramos, obtenemos el espacio total:

$$s_T = 250 + 1000 + 250 = 1500 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto

El estudio del movimiento de un móvil viene reflejado en la siguiente tabla:

Tiempo (s)	0	3	6	9
Espacio (m)	5	20	35	50

Determinar:

- Tipo de movimiento que lleva
- Determinación de la ecuación del movimiento
- Posición del móvil a los 7 s de iniciado el movimiento

Resolución

a)

Para determinar el tipo de movimiento haremos un estudio de la velocidad del móvil:

Tiempo (s)	0	3	6	9
Espacio (m)	5	20	35	50
Velocidad (m/s)	V_0	V_3	V_6	V_9

El móvil parte del reposo por lo que $V_0 = 0$

Aplicaremos para conocer la velocidad del móvil en cada intervalo de tiempo la ecuación:

$$V = \Delta e / \Delta t$$

$$V = (e_f - e_o) / (t_f - t_o)$$

Intervalo [0 - 3] s:

$$V_3 = (20 - 5) \text{ m} / (3 - 0) \text{ s}$$

$$V_3 = 15 \text{ m} / 3 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

Intervalo [6 - 3] s:

$$V_6 = (35 - 20) \text{ m} / (6 - 3) \text{ s}$$

$$V_6 = 15 \text{ m} / 3 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

Intervalo [9 - 6] s:

$$V_9 = (50 - 35) \text{ m} / (9 - 6) \text{ s}$$

$$V_9 = 15 \text{ m} / 3 \text{ s} = 5 \text{ m/s}$$

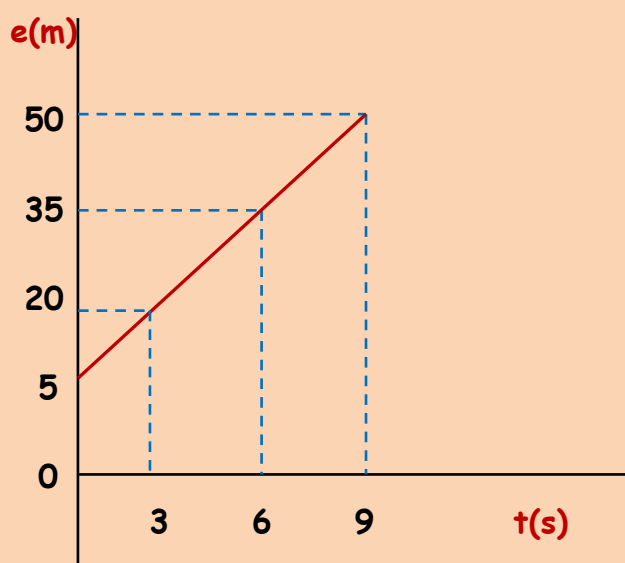
La tabla anterior quedarás de la forma:

Tiempo (s)	0	3	6	9
Espacio (m)	5	20	35	50
Velocidad (m/s)	0	5	5	5

Observamos en la tabla que la velocidad permanece constante por lo que el movimiento del móvil es **M.R.T.**

b)

Para conocer la ecuación del movimiento realizaremos la gráfica **e - t** del movimiento:



Cuando la representación del espacio con respecto al tiempo obtenemos una línea recta el movimiento es **M.R.T.** Constatámos el apartado anterior.

Nuestro objetivo es la determinación de la ecuación del movimiento. Dicha ecuación es del tipo:

$$e = f(t)$$

Que nos viene a decir: **espacio recorrido o posición del móvil es función del tiempo**. Dicho de otra forma: **Establece las sucesivas posiciones del móvil conforme transcurre el tiempo**.

En la gráfica anterior hemos obtenido una recta. La ecuación de la recta obedece la ecuación:

$$Y = K \cdot x$$

En donde:

Y = Variable dependiente

K = Constante

X = Variable uidependiente

Como ejemplo de esta ecuación tenemos:

$$Y = 3x \text{ (Ecuación de una recta)}$$

Ecuación que nos determina los valores de la variable "y" en función de la variable "x". Estamos en unos **ejes de coordenadas cartesianas en el plano**.

Recoedemos que para determinar la velocidad del móvil aplicamos la ecuación:

$$V = \Delta e / \Delta t$$

Ecuación equivalente a:

$$V = e / t$$

Despejando el espacio:

$$e = V \cdot t$$

En donde:

e = Espacio recorrido o posición

V = Constante

t = tiempo transcurrido

La ecuación:

$$e = V \cdot t$$

Cumple las características de la ecuación:

$$y = 3x$$

La ecuación:

$$e = V \cdot t$$

Es la ecuación de una recta y por lo tanto la ecuación de nuestro movimiento es:

$$e = V \cdot t$$

Pero en nuestro caso concreto y , en la tabla de valores, para un tiempo **inicial igual a cero** la posición **no es cero**. Para $t = 0$ el espacio inicial es de 5 m. Esto nos quiere decir que para establecer la ecuación debemos considerar el valor del

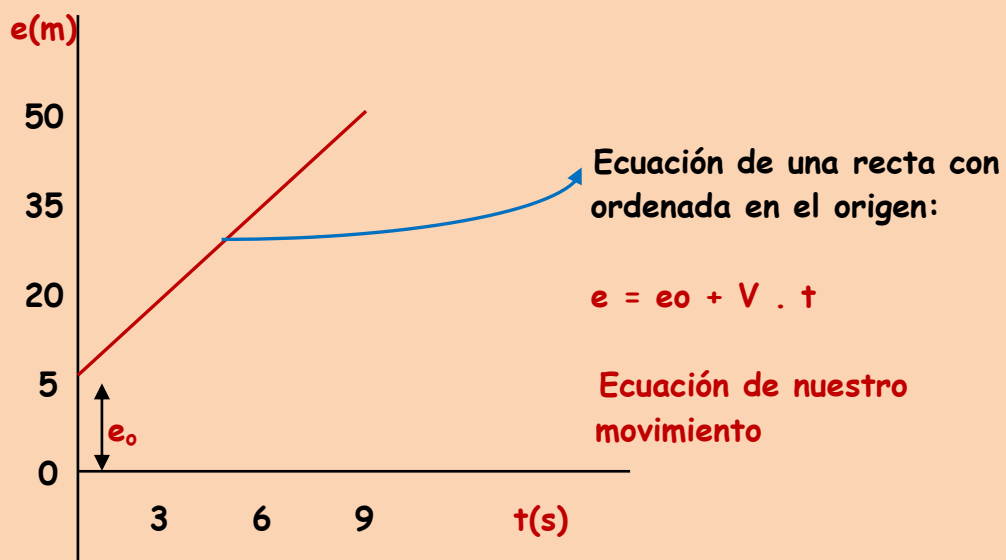
espacio inicial que denominaremos como " e_0 " que corresponde al espacio recorrido antes de contabilizar el tiempo. Por lo que la ecuación de nuestro movimiento es:

$$e = e_0 + V \cdot t$$

Ecuación que es totalmente equivalente a la ecuación:

$$y = 3x + 2$$

Ecuación correspondiente a una **línea recta** con ordenada en el origen $e_0 = 2$.



c)

Para $t = 7$ s la posición del móvil viene dada por la ecuación:

$$e = e_0 + V \cdot t$$

$$e = 5 \text{ m} + 5 \text{ m/s} \cdot 7 \text{ s} = 5 \text{ m} + 35 \text{ m} = 40 \text{ m}$$

Problema resuelto

- a) Una moto va a 12 m/s y acelera, alcanzando una velocidad de 20 m/s en 3 s. Calcula su aceleración
- b) Un coche circula a 100 Km/h. Ve una señal de limitación de velocidad, frena y se pone a 80 Km/h en 5s. ¿Cuál es su aceleración?
- c) Un coche de fórmula 1 acelera de 0 Km/h a 100 Km/h en 2,4 s. Calcula su aceleración.
- d) En una revista de motos se puede leer :“Yamaha YZF R6 2006. Aceleración 0 a 100 km/h en 4 s”. Con estos datos calcula la aceleración de este vehículo.

Resolución

a)

Pasaremos los datos al S.I.:

$$V_1 = (100 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 27,8 \text{ m/s}$$

$$V_2 = (80 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 22,2 \text{ m/s}$$

$$t = 5 \text{ s}$$

Sabemos que:

$$a = \Delta V / t = (V_f - V_0) / t$$

$$a = (20 - 12) (\text{m/s}) / 3 \text{ s} = 2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = (V_f - V_0)/t = (22,2 - 27,8) (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) / 5 \text{ s} = -1,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

b)

$$V_0 = 0$$

$$V_f = (100 \text{ Km/h}).(1000 \text{ m/1 Km}).(1 \text{ h/3600 s}) = 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 2,4 \text{ s}$$

$$a = (27,8 - 0) (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) / 2,4 \text{ s} = 11,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c)

$$V_0 = 0$$

$$V_f = 100 \text{ Km/h} = 27,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

$$a = (27,8 - 0) (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) / 4 \text{ s} = 6,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Problema resuelto

Una moto que va a 75 Km/h frena y se detiene en 13 s.
¿Cuál es la aceleración de la frenada?

Resolución

Datos al S.I.:

$$V_0 = (75 \text{ Km/h}).(1000 \text{ m} / 1 \text{ Km}).(1 \text{ h/3600 s}) = 20,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_f = 0$$

$$t = 13 \text{ s}$$

$$a = (V_f - V_o) / t = (0 - 20,8) \text{ (m.s}^{-1}\text{)} / 13 \text{ s} = -1,6 \text{ m . s}^{-2}$$

Ejercicio resuelto

Calcula el espacio que recorrerá un objeto en 20 segundos si su aceleración es de $0,2 \text{ m/s}^2$.

Resolución

El enunciado es muy escaso en datos por lo que tendremos que suponer que: $e_o = 0$; $V_o = 0$

Sabemos que:

$$e = e_o + V_o . t + \frac{1}{2} . a . t^2$$

Con las suposiciones, la ecuación anterior queda de la forma:

$$e = \frac{1}{2} . a . t^2$$

Por lo que:

$$e = \frac{1}{2} . 0,2 \text{ (m.s}^{-2}\text{)} . (20 \text{ s})^2 = \frac{1}{2} . 0,2 \text{ m.s}^{-2} \cancel{400 \text{ s}^2} = 40 \text{ m}$$

Problema resuelto

Un tren AVE que circula a 300 km/h ha de frenar con una aceleración de $1,5 \text{ m/s}^2$. Calcula el tiempo que tarda en pararse y la distancia que recorre mientras se para.

Resolución

Unidades al S.I:

$$V_o = (300 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1\text{h}/3600 \text{ s}) = 83,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = -15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$V_f = 0$$

Se trata de un M.R.U.A(-). Para el cálculo el tiempo que tarda en pararse utilizaremos la ecuación:

$$V_f = V_o + a \cdot t$$

$$0 = 83,33 \text{ m.s}^{-1} + (-15 \text{ m.s}^{-2}) \cdot t$$

$$15 \text{ m.s}^{-2} \cdot t = 83,33 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = 83,33 \text{ m.s}^{-1} / 15 \text{ m.s}^{-2} = 5,55 \text{ s}$$

En lo que se refiere al espacio la ecuación que podemos utilizar es:

$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot e$$

$$0 = (83,33 \text{ m.s}^{-1})^2 + 2 \cdot (-15 \text{ m.s}^{-2}) \cdot e$$

$$0 = 6943,9 \text{ m}^2.\text{s}^{-2} - 30 \text{ m.s}^{-2} \cdot e$$

$$30 \text{ m.s}^{-2} \cdot e = 6943,9 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$$

$$e = 6943,9 \text{ m}^2.\text{s}^{-2} / 30 \text{ m.s}^{-2} = 231,5 \text{ m}$$

Problema resuelto

Un motorista circula a 45 km/h y frena uniformemente hasta detenerse en 5 segundos. Calcula:

- a) ¿Qué aceleración ejercieron sus frenos?
- b) ¿Cuál es su velocidad 3 segundos después de iniciar la frenada?
- c) ¿En qué instante su velocidad fue de 2 m/s?
- d) ¿Cuánta distancia recorrió en la frenada?

Resolución

Unidades al S.I:

$$V_o = (45 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/Km}) \cdot (1 \text{ h}/3600 \text{ s}) = 12,5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = 5 \text{ s}$$

$$V_f = 0$$

a)

$$V_f = V_o + a \cdot t$$

$$0 = 12,5 \text{ m.s}^{-1} + a \cdot 5 \text{ s}$$

$$- 5 \text{ s} \cdot a = 12,5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$a = 12,5 \text{ m.s}^{-1} / -5 \text{ s} = -2,5 \text{ m.s}^{-2}$$

b)

$$V_{(3)} = V_o + a \cdot t$$

$$V_{(3)} = 12,5 \text{ m.s}^{-1} + (-2,5 \text{ m.s}^{-2}) \cdot 3 \text{ s}$$

$$V_{(3)} = 12,5 \text{ m.s}^{-1} - 7,5 \text{ m.s}^{-1} = 5 \text{ m.s}^{-1}$$

c)

$$V_f = V_o + a \cdot t$$

$$2 \text{ m.s}^{-1} = 12,5 \text{ m.s}^{-1} + (-2,5 \text{ m.s}^{-2}) \cdot t$$

$$2 \text{ m.s}^{-1} = 12,5 \text{ m.s}^{-1} - 2,5 \text{ m.s}^{-2} \cdot t$$

$$2,5 \text{ m.s}^{-2} \cdot t = 12,5 \text{ m.s}^{-1} - 2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = (12,5 - 2) \text{ m.s}^{-1} / 2,5 \text{ m.s}^{-2}$$

$$t = 4,2 \text{ s}$$

d)

$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot e$$

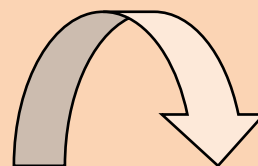
$$0 = (12,5 \text{ m.s}^{-1})^2 + 2 \cdot (-2,5 \text{ m.s}^{-2}) \cdot e$$

$$0 = 156,25 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} - 5 \text{ m.s}^{-2} \cdot e$$

$$5 \text{ m.s}^{-2} \cdot e = 156,25 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

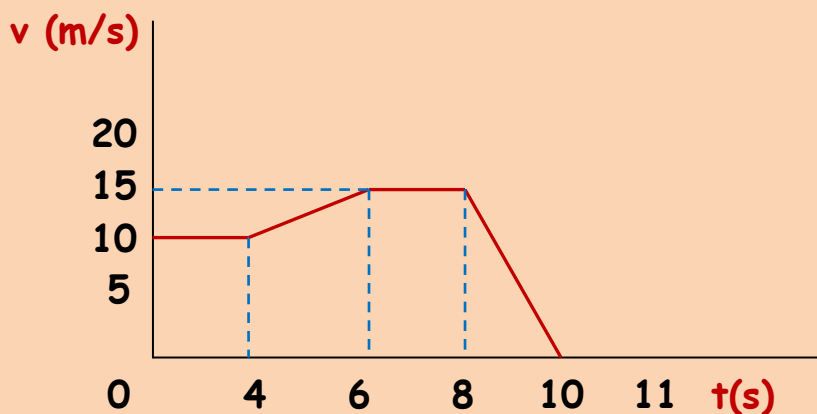
$$e = 156,25 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} / 5 \text{ m.s}^{-2}$$

$$e = 31,25$$



Problema resuelto

En el movimiento de un cuerpo se ha obtenido la siguiente gráfica v-t:



- a) Describe, con detalla, el movimiento del móvil.
- b) Calcula el espacio total recorrido en los 7 primeros segundos.

Resolución

a)

En el intervalo de tiempo: $[0 - 4]$ el móvil lleva un **M.R.U** puesto que la velocidad permanece constante e igual **10 m.s^{-1}** .

El espacio recorrido en este intervalo lo calcularemos por la ecuación:

$$e = V \cdot t$$

$$e = 10 \text{ m.s}^{-1} \cdot 4 \text{ s} = 40 \text{ m}$$

En el intervalo $[4 - 6]$ el movimiento es **M.R.U.A** ya que existe un cambio de velocidad lo que implica una aceleración de:

$$a = V_f - V_0 / t_f - t_0 = (15 - 10) \text{ m.s}^{-1} / (6 - 4) \text{ s}$$

$$a = 5 \text{ m.s}^{-1} / 2 \text{ s} = 2,5 \text{ m.s}^{-2}$$

El espacio recorrido en este intervalo es:

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = 10 \text{ m.s}^{-1} \cdot 2 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 2,5 \text{ m.s}^{-2} \cdot (2 \text{ s})^2$$

$$e = 20 \text{ m} + 5 \text{ m.s}^{-2} \cdot \text{s}^2$$

$$e = 25 \text{ m}$$

Nos hace falta estudiar el movimiento en el intervalo [6 - 7] para tener un total de 7 s. En este intervalo de tiempo el movimiento es **M.R.U** con una velocidad de 15 m.s^{-1} . El espacio recorrido en este intervalo es de:

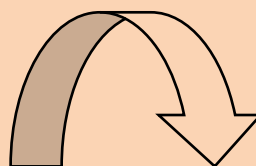
$$e = V \cdot t$$

$$e = 15 \text{ m.s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} = 15 \text{ m}$$

b)

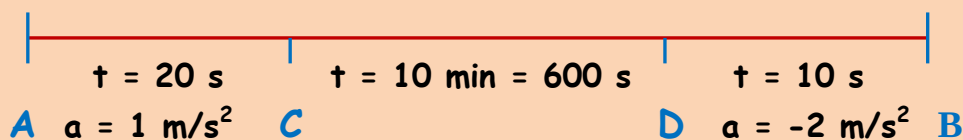
El espacio total recorrido en los 7 s es:

$$e = 40 \text{ m} + 25 \text{ m} + 15 \text{ m} = 80 \text{ m}$$



Problema resuelto

Un autobús sale de una parada A acelerando durante 20 s a 1 m/s^2 . Sigue a la velocidad que ha alcanzado durante 10 minutos y frena durante 10 s con una $a = -2\text{ m/s}^2$ quedando parado en una parada B. ¿Cuál es la distancia desde A a B? Dibuja la gráfica v-t.

Resolución

$$V_0 = 0$$

$$V_C = a \cdot t = 1\text{ m.s}^{-2} \cdot 20\text{ s} = 20\text{ m.s}^{-1} = V_D$$

El espacio recorrido de A a C es:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\text{ m.s}^{-2} \cdot (20\text{ s})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1\text{ m.s}^{-2} \cdot 400\text{ s}^2 = 200\text{ m}$$

$$e_{AC} = 200\text{ m}$$

De C a D el movimiento es **M.R.U** puesto que la velocidad permanece constante. El espacio recorrido en este tramo es:

$$e_{CD} = V_C \cdot t = 20\text{ m.s}^{-1} \cdot 600\text{ s} = 12000\text{ m}$$

El espacio en el tramo DB lo calcularemos según la ecuación:

$$e_{DB} = V_D \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 =$$

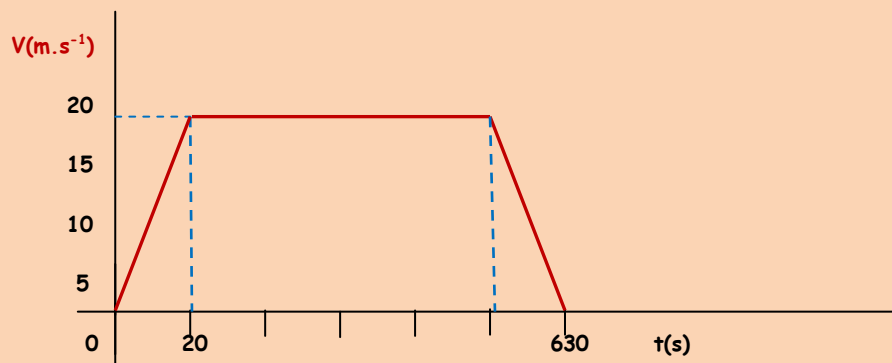
$$= 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 10 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (10 \text{ s})^2 =$$

$$= 200 \text{ m} - 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{s}^2 = 100 \text{ m}$$

La distancia AB será:

$$e_{AB} = 200 \text{ m} + 12000 \text{ m} + 100 \text{ m} = 12300 \text{ m}$$

La gráfica $V - t$ quedará de la forma:

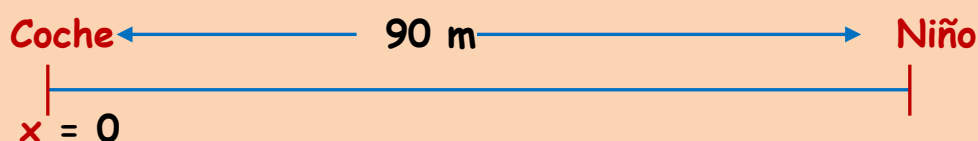


Problema resuelto

Un Porsche viaja a una velocidad de 166 km/h, y el conductor advierte que, en medio de la carretera, hay un niño jugando a las canicas. Suponiendo que inicia la frenada cuando se encuentra a 90 m del niño, y que los frenos entregan una aceleración uniforme de $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$: ¿Se salva el chiquillo?

Resolución

El Sistema de referencia quedaría de la siguiente forma:



Cambio de unidades:

$$V_0 = (166 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 46,11 \text{ m.s}^{-1}$$

Cuando el conductor se dé cuenta de la existencia del niño aplicará los frenos, que le proporcionan una aceleración de **-12 m.s⁻²**, en el enunciado no aparece el signo menos, pero una frenada siempre implica una disminución de la velocidad y por lo tanto la aceleración será negativa.

Al aplicar los frenos, hasta pararse ($V_f = 0$), el coche ha recorrido un espacio de:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot e$$

$$0 = (46,11 \text{ m.s}^{-1})^2 + 2 \cdot (-12 \text{ m.s}^{-2}) \cdot e$$

$$0 = 2126,13 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} - 24 \text{ m.s}^{-2} \cdot e$$

$$24 \text{ m.s}^{-2} \cdot e = 2126,13 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} ;$$

$$e = 2126,13 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} / 24 \text{ m.s}^{-2} = 88,6 \text{ m}$$

Como el niño se encontraba a 90 m **no será atropellado por el coche.**

Problema resuelto

Una motocicleta se mueve según la ecuación:

$$x = 20 + 10t - 0,5t^2$$

a) Razona si se trata de un movimiento acelerado o uniforme.

En caso de tratarse de un movimiento acelerado indica la velocidad inicial y la aceleración del mismo.

b) Calcula el tiempo y la distancia que recorre la motocicleta hasta quedar detenida.

Resolución

a)

La ecuación del movimiento es:

$$e = 20 + 10 t - 0,5 t^2$$

Esta ecuación corresponde a un movimiento parabólico, en donde se cumplen las siguientes características:

Recordando que:

$$V = de/dt$$

$$V = d(20 + 10 t - 0,5 t^2)/dt$$

$$V = 10 - 2 \cdot 0,5 t$$

$$V = 10 - t$$

La velocidad **no es constante** puesto que depende del **tiempo**.

Recordemos que:

$$a = dV/dt$$

$$a = d(10 - t)/dt$$

$$a = -1 \text{ m/s}^2 \text{ (En el S.I.)}$$

La aceleración permanece constante y por lo tanto se trata de un **M.R.U.A.**.

b)

Si la motocicleta se detiene $\rightarrow V_f = 0$. Podemos calcular el espacio recorrido hasta que se pare, mediante la ecuación:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2 \cdot a \cdot e$$

$$0 = (10 \text{ m.s}^{-1})^2 + 2 \cdot (-1 \text{ m.s}^{-2}) \cdot e$$

$$0 = 100 \text{ m}^2.\text{s}^{-2} - 2 \text{ m.s}^{-2} \cdot e$$

$$2 \text{ m.s}^{-2} \cdot e = 100 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$$

$$e = 100 \text{ m}^2.\text{s}^{-2} / 2 \text{ m.s}^{-2} = 50 \text{ m}$$

En lo referente al tiempo que tarda en detenerse lo podemos conocer mediante la ecuación:

$$V_f = V_0 + a \cdot t$$

$$0 = 10 \text{ m.s}^{-1} + (-1 \text{ m.s}^{-2}) \cdot t$$

$$0 = 10 \text{ m.s}^{-1} - 1 \text{ m.s}^{-2} \cdot t$$

$$1 \text{ m.s}^{-2} \cdot t = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = 10 \text{ m.s}^{-1} / 1 \text{ m.s}^{-2}$$

$$t = 10 \text{ s}$$

Ejercicio resuelto

Un vehículo circula a 100 Km/h cuando choca contra un muro de hormigón que no sufre aceleración o deformación alguna. Si la deformación que experimenta el vehículo es de 0,6 m, determina el tiempo que tarda el vehículo en detenerse y qué aceleración sufrirán los ocupantes del vehículo

Resolución

El vehículo lleva un **M.R.U.A** puesto que lleva una velocidad determinada y termina por pararse ($V_f = 0$).

El muro no sufre desplazamiento mientras que el vehículo tiene un desplazamiento equivalente a su deformación.

Recordemos que en **M.R.U.A**:

$$e = V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (1)$$

$$V_o = (100 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 27,77 \text{ m/s}$$

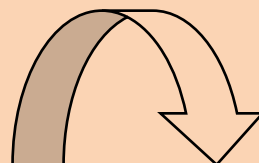
Llevamos el valor de V_o a la ecuación (1):

$$0,6 = 27,77 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (2)$$

Por otra parte sabemos que:

$$a = V_f - V_o / t$$

$$t = V_f - V_o / a \quad (3)$$



Llevamos (3) a (2):

$$0,6 = 27,77 \cdot (0 - 27,77/a) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot [(0 - 27,77)^2/a^2]$$

$$0,6 = -771,17/a + 385,58/a$$

$$0,6 a = -771,17 + 385,58$$

$$0,6 a = -385,59$$

$$a = -385,59 / 0,6 = -642,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

En lo referente al tiempo:

$$a = V_f - V_o / t$$

$$t = V_f - V_o / a$$

$$t = (0 - 27,77) / (-642,65) = 0,043 \text{ s}$$

Ejercicio resuelto

Un conejo corre hacia su madriguera a 72 Km/h. Cuando está a 200 m de ella un perro, situado a 40 m detrás del conejo, sale en su persecución recorriendo 90 m con una aceleración de 5 m/s² y continuando después a velocidad constante.

a) ¿Alcanzará el perro al conejo.

b) ¿Qué ocurrirá si la madriguera estuviera 100 m más lejos?

Razone ambas respuestas con ecuaciones.

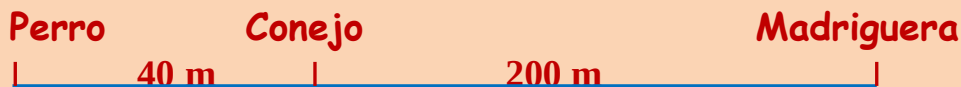
Resolución

a)

Cambio de unidades al S.I.:

$$V = (72 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 20 \text{ m/s}$$

El croquis de la situación inicial es el siguiente:



Características del movimiento del perro:

$$\left. \begin{array}{l} a_{\text{perro}} = 5 \text{ m/s}^2 \\ V_0 = 0 \\ e = 90 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ M.R.U.A}$$

El perro conseguirá una velocidad final de:

$$V_f^2 \text{ perro} = V_0^2 \text{ perro} + 2 \cdot a \cdot e$$

$$V_0 \text{ perro} = 0$$

$$V_f^2 \text{ perro} = 2 \cdot 5 \cdot 90$$

$$V_f \text{ perro} = (2 \cdot 5 \cdot 90)^{1/2} = 30 \text{ m/s}$$

Tardará un tiempo en recorrer los 90 m:

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$V_0 = 0$$

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$90 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2$$

$$t = [(90/(2,5))]^{1/2} = 6 \text{ s}$$

Características del movimiento del conejo:

$$V = \text{const.} = 20 \text{ m/s} \rightarrow \text{M.R.U}$$

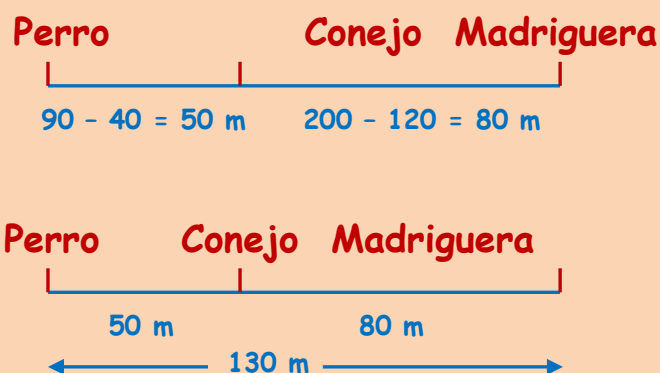
En estos 6 s el conejo (M.R.U) recorrerá un "e":

$$e = V \cdot t$$

$$e = 20 \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} = 120 \text{ m}$$

A partir de este momento conejo y perro siguen moviéndose pero con M.R.U puesto que ambos llevan velocidad constante.

Mientras el perro recorre 90 m el conejo recorre 120 m.
Luego la nueva situación es:



El conejo tardará en alcanzar la madriguera un tiempo:

$$t_{\text{conejo}} = e / V_{\text{conejo}}$$

$$t_{\text{conejo}} = 80 \text{ m} / (20 \text{ m/s}) = 4 \text{ s}$$

El perro tardará en alcanzar la madriguera:

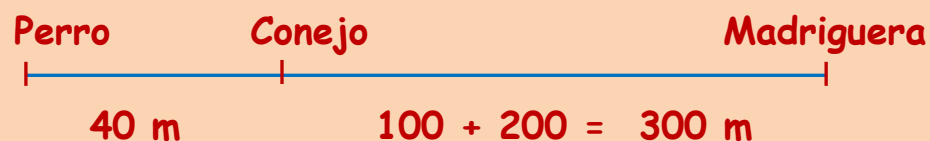
$$t_{\text{perro}} = e / V_{\text{perro}}$$

$$t_{\text{perro}} = 130 \text{ m} / (30 \text{ m/s}) = 4,33 \text{ s}$$

Luego $t_{\text{conejo}} < t_{\text{perro}}$ por lo que el conejo **no será cazado**.

b)

Nueva situación:



Características del movimiento del perro:

$$a_{\text{perro}} = 5 \text{ m/s}^2$$

$$V_0 = 0$$

$$e = 90 \text{ m}$$

El perro desarrolla un **M.R.U.A.**

El perro conseguirá una velocidad de final de:

$$V_f^2_{\text{perro}} = V_0^2_{\text{perro}} + 2 \cdot a \cdot e$$

$$V_0_{\text{perro}} = 0$$

$$V_f^2_{\text{perro}} = 2 \cdot 5 \cdot 90$$

$$V_{f_{\text{perro}}} = (2 \cdot 5 \cdot 90)^{1/2} = 30 \text{ m/s}$$

Tardará un tiempo en recorrer los 90 m:

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Con las características del movimiento la ecuación anterior queda de la forma:

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$90 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2$$

$$t = [(90/(2,5))]^{1/2} = 6 \text{ s}$$

Características del movimiento del conejo:

$$V = \text{const.} = 20 \text{ m/s} \rightarrow \text{M.R.U.}$$

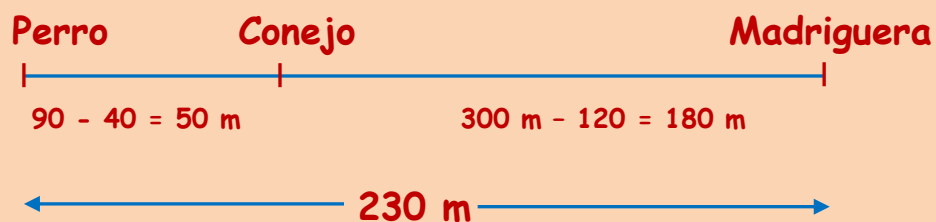
En estos 6 s el conejo (M.R.U) recorrerá un "e":

$$e = V \cdot t$$

$$e = 20 \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} = 120 \text{ m}$$

La nueva situación es:

A partir de este momento conejo y perro se mueven con M.R.U.



El tiempo que tardará el conejo en alcanzarla madriguera es:

$$t_{\text{conejo}} = e / V_{\text{conejo}}$$

$$t_{\text{conejo}} = 180 \text{ m} / (20 \text{ m/s}) = 9 \text{ s}$$

El tiempo que tardará el perro en alcanzar la madriguera:

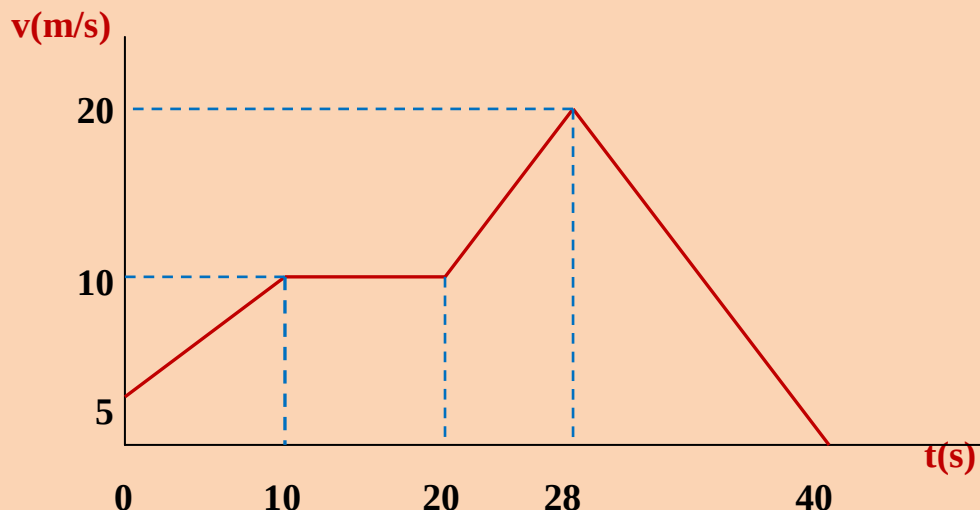
$$t_{\text{perro}} = e / V_{\text{perro}}$$

$$t_{\text{perro}} = 230 \text{ m} / (30 \text{ m/s}) = 8,76 \text{ s}$$

En este caso el perro tarda menos tiempo y por lo tanto **cazará al conejo**.

Ejercicio resuelto

El movimiento de un móvil viene dado por la gráfica:



Determinar para cada intervalo de tiempo:

- Explica la gráfica y determina el tipo de movimiento.
- Aceleración.
- Espacio recorrido.

d) Espacio total recorrido

Resolución

a)

INTERVALO (s)

0 - 10

El móvil lleva una velocidad inicial que va aumentando de forma uniforme, lo que nos indica que en este intervalo existe un **M.R.U.A.**

INTERVALO (s)

10 - 20

La velocidad permanece constante, 10 m/s. Esto nos indica que el movimiento en este intervalo es **M.R.U.**

INTERVALO (s)

20 - 28

La velocidad vuelve a aumentar de forma uniforme hasta alcanzar la velocidad de 20 m/s. Existe aceleración y por tanto el movimiento en este intervalo es **M.R.U.A.**

INTERVALO (s)

28 - 40

La velocidad disminuye uniformemente hasta que el móvil se

para, $V_f = 0$. Existe una aceleración que esta situación es **negativa**. Se trata de un **M.R.U.A.(-)**.

b)

INTERVALO (s)

0 - 10

$$V_o = 5 \text{ m/s}^2$$

$$V_f = 10 \text{ m/s}^2$$

$$a = V_f - V_o / t$$

$$a = (10 - 5) \text{ m/s} / 10 \text{ s} = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

INTERVALO (s)

10 - 20

La velocidad permanece constante e igual a 10 m/s. Esta constancia en la velocidad implica que la aceleración valga cero.

$$a = 10 - 10 / 10 = 0 / 10 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

INTERVALO (s)

20 - 28

Aumento uniforme de la velocidad lo que implica una aceleración:

$$V_o = 10 \text{ m/s}$$

$$V_f = 20 \text{ m/s}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

$$a = V_f - V_o / t$$

$$a = 20 - 10 / 8 = 1,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

INTERVALO (s)

$$28 - 40$$

Variación de velocidad, existencia de aceleración.

$$V_o = 20 \text{ m/s}$$

$$V_f = 0$$

$$t = 12 \text{ s}$$

$$a = V_f - V_o / t$$

$$a = 0 - 20 / 12 = - 1,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c)

INTERVALO (s)

$$0 - 10$$

$$e = V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = 5 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 100 = 50 + 25 = 75 \text{ m}$$

INTERVALO (s)

$$10 - 20$$

$$e = V \cdot t$$

$$e = 10 \cdot 10 = 100 \text{ m}$$

INTERVALO (s)

$$10 - 20$$

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = 10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 100 = 100 + 62,5 = 162,5 \text{ m}$$

INTERVALO (s)

$$28 - 40$$

$$e = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = 20 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot (-1,66) \cdot 144 = 240 - 119,52 = 120,48 \text{ m}$$

d)

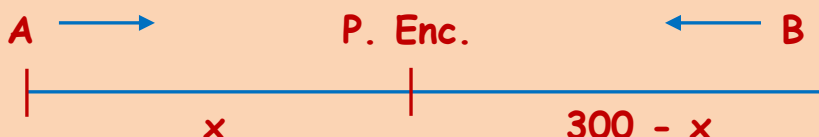
$$e_T = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 75 + 100 + 162,5 + 120,48 = 457,98 \text{ m}$$

Ejercicio resuelto

Sobre un camino recto, dos puntos A y B están separados 300 m. Partiendo del reposo, un móvil sale de A hacia B acelerando a razón de 2 m/s^2 . Simultáneamente otro móvil sale de B hacia A con velocidad constante de 20 m/s . ¿A qué distancia de A ocurre el encuentro?

Resolución

Situación en el plano:



$$a_A = 2 \text{ m/s}^2 \rightarrow \text{M.R.U.A.}$$

$$V_B = 20 \text{ m/s} \rightarrow \text{M.R.U.}$$

Parten simultáneamente lo que implica:

$$t_A = t_B \quad (1)$$

$$V_{0A} = 0$$

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_A^2$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t_A^2$$

$$t_A^2 = x$$

$$t_A = (x)^{1/2}$$

$$e_B = V_B \cdot t_B$$

De donde:

$$t_B = e_B / V_B$$

$$t_B = (300 - x) / V_B$$

Conociendo t_A y t_B nos podemos ir a la ecuación (1):

$$(x)^{1/2} = (300 - x) / V_B$$

Elevamos los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$[(x)^{1/2}]^2 = (300 - x)^2 / 20^2$$

$$400 x = 90000 + x^2 - 600 x$$

$$x^2 - 400 x - 600 x + 90000 = 0$$

$$x^2 - 1000 x + 90000 = 0$$

$$x = [1000 \pm (1000000 - 360000)^{1/2}] / 2$$

$$x = 1000 \pm 800 / 2$$

$$x_1 = 1000 + 800 / 2 = 900 \text{ m}$$

No es válida puesto que la separación entre los móviles es de 300 m.

$$x_2 = 1000 - 800 / 2 = 100 \text{ m}$$

El encuentro se produce a 100 m de A.

Ejercicio resuelto

Cuando la luz del semáforo cambia a verde, un motociclista inicia su marcha con aceleración constante de 2 m/s^2 . Justo en ese momento, un camión que marcha a la velocidad constante de 15 m/s pasa al motociclista. a) ¿A qué distancia del semáforo el motociclista alcanza al camión? b) ¿Qué velocidad (en Km/h) tendrá el motociclista en ese instante?.

Resolución

$$a_{\text{motoc.}} = 2 \text{ m/s}^2.$$

$$V_{\text{cami.}} = 15 \text{ m/s}$$

a)

Situación inicial:

SEMAFOROMotoc: $a=2\text{m/s}^2$, $V_0=0$

P . Encuentro

Cami: $V_{0\text{cami}} = 15 \text{ m/s}$

El tiempo empleado por el motoc. y el cami. Para encontrarse es el mismo así como la distancia recorrida.

$$t_{\text{motoc.}} = t_{\text{cami.}} = t$$

Movimiento de motoc.: **M.R.U.A**

$$e = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$e = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^2$$

$$e = t^2 \quad (1)$$

Movimiento del cami.: **M.R.U**

$$e = V_{\text{cami}} \cdot t$$

$$e = 15 \cdot t \quad (2)$$

Uniendo las ecuaciones (1) y (2) formamos un sistema:

$$\left. \begin{array}{l} e = t^2 \quad (1) \\ e = 15 \cdot t \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$t^2 = 15 \cdot t$$

$$t = 15 \text{ s}$$

Nos vamos a (2):

$$e = 15 \text{ m/s} \cdot 15 \text{ s} = 225 \text{ m}$$

Se encontrarán a **225 m** del semáforo.

b)

$$V_{\text{motoc.}} = 0$$

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$V_f = ?$$

Recordemos que:

$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot a \cdot e$$

$$V_o = 0$$

$$V_f^2 = 2 \cdot a \cdot e$$

$$V_f^2 = 2 \cdot 2 \text{ m/s}^2 \cdot 225 \text{ m} = 900 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$V_F = (900 \text{ m}^2/\text{s}^2)^{1/2} = 30 \text{ m/s}$$

6.- Movimiento de caída libre de los cuerpos

Estudio de la caída libre

http://www.educaplus.org/movi/4_2caidalibre.html

Caída libre de los cuerpos

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/graves/graves.htm>

Caída libre

http://www.profesorenlinea.cl/fisica/Movimiento_caida_libre.html

Video: Caída libre de los cuerpos

<http://www.youtube.com/watch?v=s5QcJfMH-es>

Video: Caída libre de los cuerpos

http://www.youtube.com/watch?v=RU_BDNNAcRc&feature=related

Video: Caída libre de los cuerpos

<http://www.youtube.com/watch?v=D1AyTelU-4w>

Video: Características de la caída libre de los cuerpos.
Problemas.

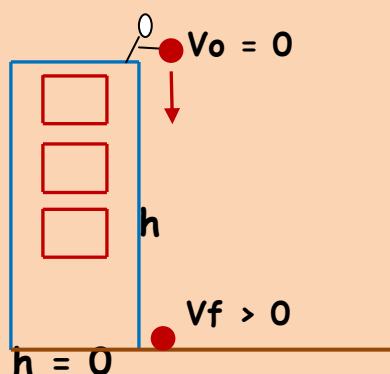
<http://www.youtube.com/watch?v=Ct6GYwze-lw&feature=related>

Video: Caída libre de los cuerpos

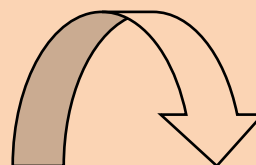
<http://fisica-quimica.blogspot.com.es/2006/11/caida-libre.html>

Supongamos la siguiente experiencia:

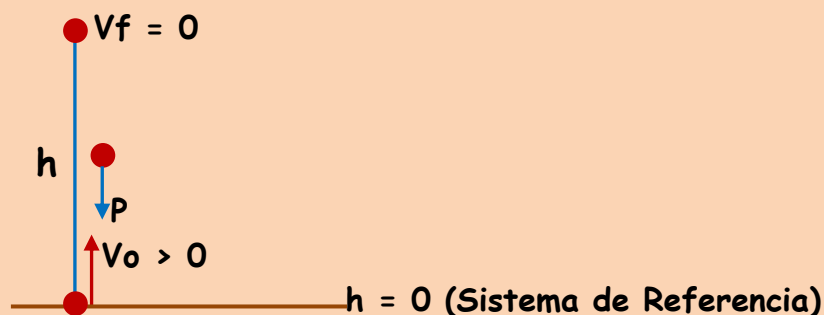
Desde lo alto de un edificio dejamos caer un cuerpo.



Como existe una variación uniforme de la velocidad, en el movimiento de caída implica una aceleración constante que se llamada **Aceleración de la gravedad** cuyo valor es aceleración **$9,81 \text{ m/s}^2$** . Por esta razón, el movimiento de caída libre de los cuerpos es un ejemplo de **M.R.U.A.**



También podemos realizar la experiencia de lanzar verticalmente hacia arriba el mismo cuerpo:

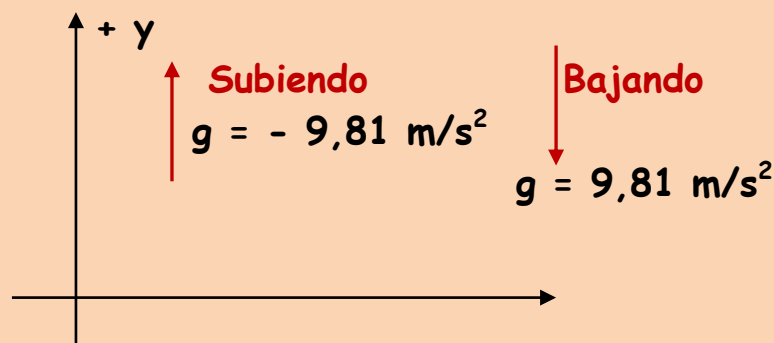


A la subida del cuerpo se le opone una fuerza, su peso, que hace posible que la velocidad disminuya hasta que se para ($V_f = 0$).

El peso hace posible que el cuerpo ascienda pero con una aceleración negativa de valor $g = -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Tenemos que establecer un **criterio de signos** para el valor de la **aceleración de la gravedad**. Tenemos dos caminos para establecer este criterio:

a) Consideramos que trabajamos en unos ejes de coordenadas:



b) Considerar: si **aumenta la velocidad** la **aceleración será positiva** ($9,81 \text{ m/s}^2$), o en caso contrario, si **disminuye la velocidad** **será negativa** ($g = -9,81 \text{ m/s}^2$).

Conclusión:

Bajando "g" es positiva y subiendo será negativa.

Yo, en particular, trabajo con el segundo criterio, tomando siempre como sistema de referencia el eje **OX** o el "suelo" en donde establezco la condición de **$h = 0$** .

Las ecuaciones del movimiento de caída libre, como **M.R.U.A** que es, tendrá las mismas ecuaciones que éste cambiando simplemente las siglas de las magnitudes.

ECUACIÓN GENERAL	CONDICIÓN $h_0 = 0$	CONDICIÓN $V_0 = 0$
$V_f = V_0 + g \cdot t$	$V_f = V_0 + g \cdot t$	$V_f = g \cdot t$
$g = V_f - V_0 / t$	$g = V_f - V_0 / t$	$g = V_f / t$
$h = h_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$h = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	$h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$
$V_f^2 = V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h$	$V_f^2 = V_0^2 + 2 \cdot g \cdot h$	$V_f^2 = 2 \cdot g \cdot h$

Problema resuelto

Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con velocidad de 90 km/h. Calcular qué altura alcanzará y cuánto tiempo tarda en llegar de nuevo al suelo.

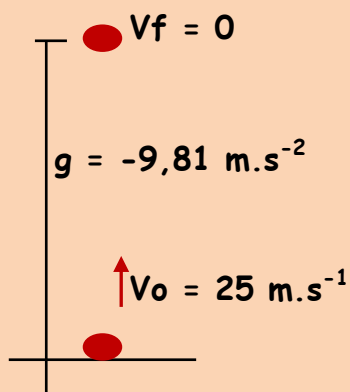
Resolución

Unidades al S.I.:

$$V_0 = (90 \text{ km/h}) \cdot (1000 \text{ m/1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

$$g = -9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

$$V_f = 0$$



Es un lanzamiento vertical (**M.R.U.A**) de ecuaciones:

$$V_f = V_0 + g \cdot t \quad (1)$$

$$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

En las que $g = -9,8 \text{ m/s}^2$

Estará subiendo hasta que se quede sin velocidad ($v_f = 0$).

Con la ecuación (1):

$$0 = 25 \text{ m.s}^{-1} + (-9,8 \text{ m.s}^{-2}) \cdot t$$

$$0 = 25 \text{ m.s}^{-1} - 9,8 \text{ m.s}^{-2} \cdot t$$

$$9,8 \text{ m.s}^{-2} \cdot t = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = 25 \text{ m.s}^{-1} / 9,8 \text{ m.s}^{-2} = 2,55 \text{ s tarda en subir.}$$

Con la ecuación (2)

$$\begin{aligned}
 e &= 25 \text{ m.s}^{-1} \cdot 2'55 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-9'8 \text{ m.s}^{-2}) \cdot (2'55 \text{ s})^2 = \\
 &= 25 \text{ m.s}^{-1} \cdot 2,55 \text{ s} - 4,9 \text{ m.s}^{-2} \cdot 6,5 \text{ s}^2 = \\
 &= 63,75 \text{ m} - 31,85 \text{ m} = 31'9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

El tiempo empleado en bajar se puede obtener estudiando el movimiento de caída libre ($v_0 = 0$, $a = g = 9'8 \text{ m/s}^2$). Las ecuaciones son las del **M.R.U.A.**:

$$e = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

La altura que debe descender es la misma que subió (31,89 m) y $V_0 = 0$:

$$31'89 \text{ m} = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 9'8 \text{ m.s}^{-2} \cdot t^2$$

$$31'89 \text{ m} = 4'9 \text{ m.s}^{-2} \cdot t^2$$

$$t = 2'55 \text{ s}$$

Tarda el mismo tiempo en la subida y en la bajada del cuerpo. Luego:

$$t_T = 2,55 \text{ s} + 2,55 \text{ s} = 5,1 \text{ s}$$

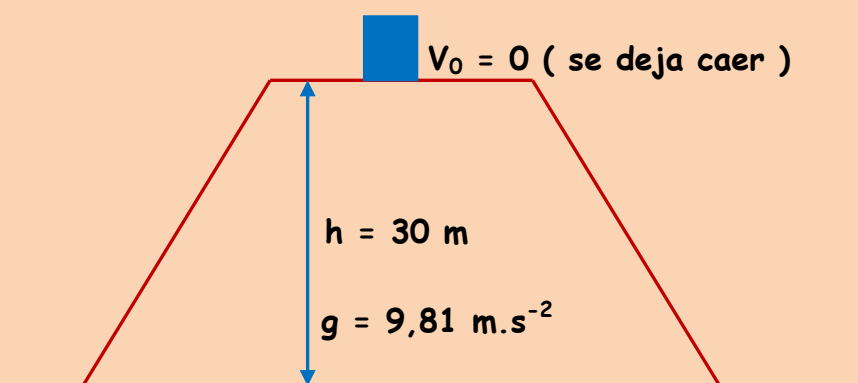
Ejercicio resuelto

Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo un cuerpo de 5 kg que se deja caer desde lo alto de un puente de 30 m? ¿Con qué velocidad llegará abajo? ¿Y si el cuerpo pesara 0,5 kg?

Resolución

Recordemos que la Cinemática estudia el movimiento de los cuerpos sin tener en cuenta las causas (fuerzas) que los producen. Por tanto el dato de la masa influye en el peso del cuerpo (fuerza) pero no en la Cinemática de este.

El croquis del problema quedaría de la forma:



Se trata de un movimiento **M.R.U.A** y por lo tanto para calcular el tiempo que tarda en caer podemos utilizar la ecuación:

$$e = e_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

como $e_0 = 0$ y $V_0 = 0 \rightarrow$

$$e = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$30 \text{ m} = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot t^2$$

$$t = (60 \text{ m} / 9,81 \text{ m.s}^{-2})^{1/2}$$

$$t = 2,47 \text{ s}$$

En lo referente a la velocidad de llegada al suelo:

$$V_f = V_0 + g \cdot t$$

$$V_0 = 0 \rightarrow$$

$$V_f = (9,81 \text{ m.s}^{-2}) \cdot 2,47 \text{ s} = 24,23 \text{ m.s}^{-1}$$

Ejercicio resuelto

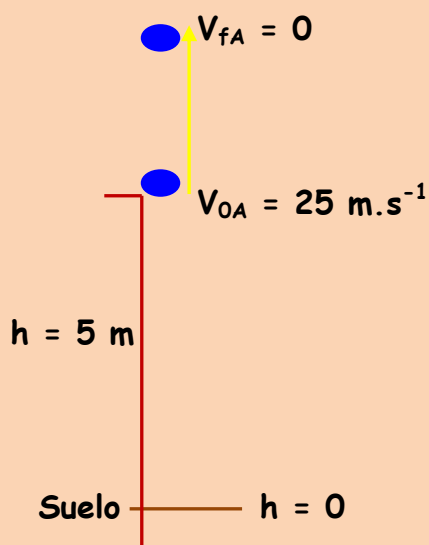
Desde una altura de 5 m una persona lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 25 m/s.

- Halla la velocidad de la piedra 2 segundos después del lanzamiento
- Halla la posición de la piedra 3 s después del lanzamiento.
- Averigua cuando se detiene para iniciar el descenso.

Resolución

a)

El Sistema de Referencia quedaría de la forma:



Lo primero que calcularemos será lo que tarda el cuerpo en pararse ($V_{fA} = 0$). Podría ocurrir que en 2 s el cuerpo alcance la máxima altura y esté bajando:

$$0 = 25 \text{ m.s}^{-1} + (-9,81 \text{ m.s}^{-2}) \cdot t$$

$$9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot t = 25 \text{ m.s}^{-1}$$

$$t = 25 \cancel{\text{ m.s}^{-1}} / 9,81 \cancel{\text{ m.s}^{-2}} = 2,55 \text{ s.}$$

Al cabo de 2 s el cuerpo sigue subiendo, luego su velocidad será:

$$V_f = V_o + g \cdot t$$

$$V_f = 25 \text{ m.s}^{-1} + (-9,81 \text{ m.s}^{-2}) \cdot 2 \text{ s} =$$

$$= 25 \text{ ms}^{-1} - 19,62 \text{ m.s}^{-1} = 5,38 \text{ m.s}^{-1}.$$

b)

El tiempo para alcanzar la máxima altura es de 2,55 s, luego $h_{\max}$:

$$h_{\max} = h_o + V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$h_o = 0$$

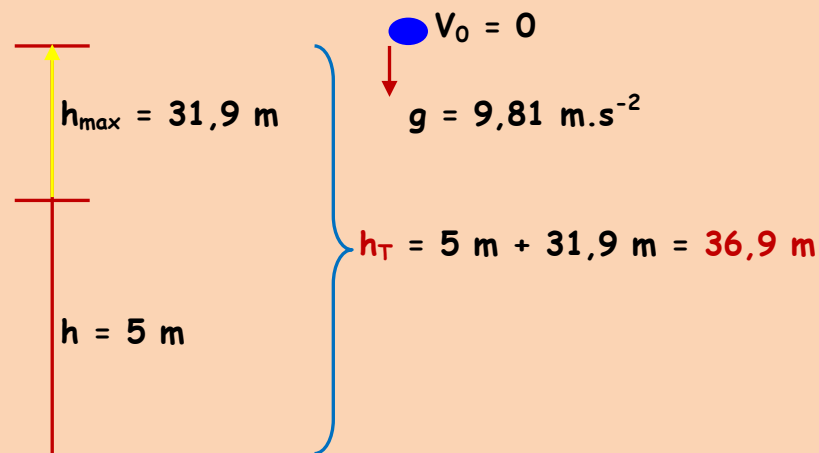
$$h_{\max} = V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 =$$

$$= 25 \text{ m.s}^{-1} \cdot 2,55 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot (-9,81 \text{ m.s}^{-2}) \cdot (2,55 \text{ s})^2 =$$

$$= 63,75 \text{ m} - 4,9 \cancel{\text{ m.s}^{-2}} \cdot 6,5 \cancel{\text{ s}^2} = 63,75 \text{ m} - 31,85 \text{ m} =$$

$$= 31,9 \text{ m}$$

La nueva situación del cuerpo es:



De los 3 s se han consumido 2,55 s. El cuerpo empezará a descender durante un tiempo de:

$$3 \text{ s} = 2,55 \text{ s} + t$$

$$t = 0,45 \text{ s}$$

La altura descendida será:

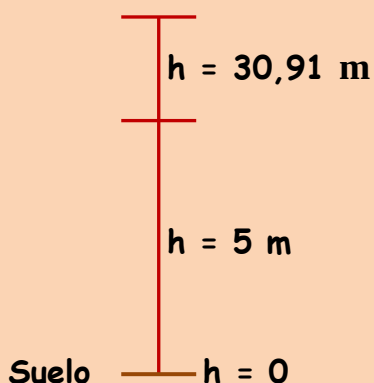
$$h = h_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h_0 = 0 \text{ y } V_0 = 0$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot (0,45 \text{ s})^2 = 0,99 \text{ m}$$

De los 31,9 m que subió ha descendido 0,99 , luego la nueva situación es:

$$h = 31,9 \text{ m} - 0,99 \text{ m} = 30,91 \text{ m}$$



La posición del cuerpo respecto al suelo será:

$$h = 5 \text{ m} + 30,1 \text{ m} = 35,1 \text{ m}$$

c)

Se calculó en el apartado a). A los **2,55 s** de iniciado el movimiento.

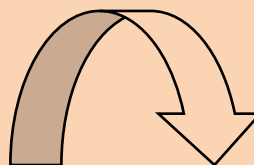
Ejercicio resuelto

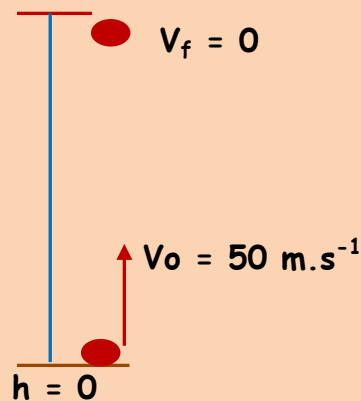
Lanzamos hacia arriba un cuerpo con una velocidad inicial de 50 m/s. Calcula: a) La altura máxima alcanzada. b) El tiempo que tarda en alcanzar dicha altura. c) La velocidad con que vuelve a caer al suelo.

Resolución

a)

La situación del cuerpo es la siguiente:





$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot g \cdot h_{\max}$$

$$0 = (50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + 2 \cdot (-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot h_{\max}$$

$$g = -9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$0 = 2500 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} - 19,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot h_{\max}$$

$$19,62 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot h_{\max} = 2500 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$h_{\max} = 2500 \text{ m}^2 \cdot \cancel{\text{s}^{-2}} / 19,62 \text{ m} \cdot \cancel{\text{s}^{-2}} = 127,42 \text{ m}$$

b)

El tiempo en alcanzar la máxima altura es:

$$V_f = V_o + g \cdot t$$

$$0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} + (-9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot t$$

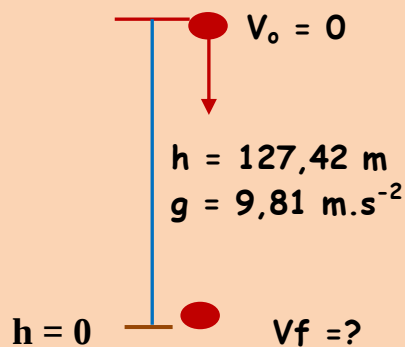
$$0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot t$$

$$9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot t = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = 50 \text{ m.s}^{-1} / 9,81 \text{ m.s}^{-2} = 5,09 \text{ s}$$

c)

La situación actual del cuerpo es:



$$V_f^2 = V_o^2 + 2 \cdot g \cdot h$$

$$V_f^2 = 0 + 2 \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot 127,42 \text{ m} =$$

$$= (2499,98 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2})^{1/2} = 49,99 \text{ m.s}^{-1} \approx 50 \text{ m.s}^{-1}$$

Llega al suelo con la misma velocidad con la que partió siempre que no actúe fuerza externa sobre el sistema.

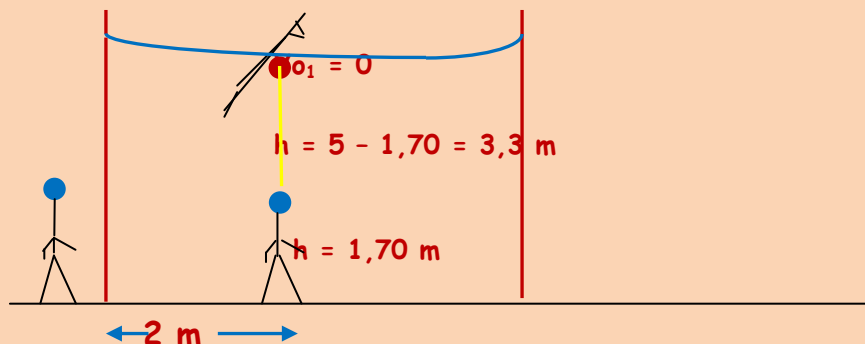
Ejercicio resuelto

Un pájaro parado en un cable a 5 m sobre el suelo deja caer un excremento libremente. Dos metros por delante de la vertical del pájaro, y en sentido hacia ella, va por la calle una persona a 5 Km/h. La persona mide 1,70 m. Calcula:

- Si le cae en la cabeza.
- A qué velocidad debería ir para que le callera encima.

Resolución

a)



Unidades al S.I.:

$$V_{1F} = (5 \text{ Km/h}) \cdot (1000 \text{ m/ 1 Km}) \cdot (1 \text{ h/3600 s}) = 1,38 \text{ m/s}$$

El excremento lleva **M.R.U.A** y tarda en descender los 3,3 m un tiempo de:

$$e = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$3,3 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2$$

$$t = (6,6/9,81)^{1/2} = 0,82 \text{ s}$$

En este tiempo la persona, que lleva **M.R.U**, recorre un espacio de:

$$e = V \cdot t$$

$$e = 1,38 \text{ m/s} \cdot 0,82 \text{ s} = 1,13 \text{ m}$$

La conclusión es que el excremento **no cae encima de de la cabeza de la persona.**

b)

La velocidad que debe llevar la persona dependerá del espacio a recorrer y del tiempo empleado.

El espacio es de 2 m y el tiempo es 0,82 s:

$$V = e/t$$

$$V = 2 \text{ m} / 0,82 \text{ s} = 2,43 \text{ m/s}$$

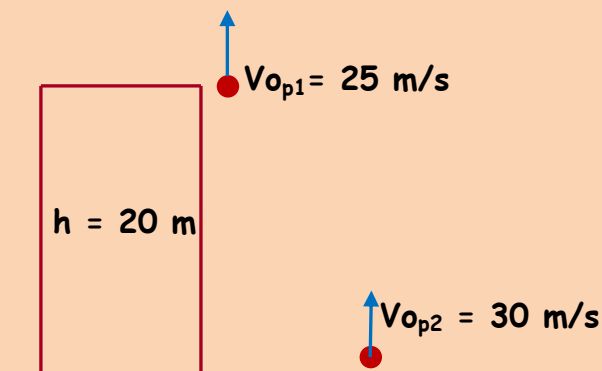
Ejercicio resuelto

Desde una azotea a 20 m del suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 25 m/s. Al mismo tiempo desde el suelo, se lanza otra piedra, también verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 30 m/s. Calcula:

- La distancia del suelo a la que se cruzan y el tiempo que tardan en cruzarse.
- Las velocidades de cada piedra en ese instante.

Resolución

a)



La piedra 1 alcanzará una altura máxima ($V_{f_{p1}} = 0$) de:

$$V_{f_{p1}}^2 = V_{o_{p1}}^2 + 2 \cdot (-g) \cdot h$$

$$0 = 625 - 2 \cdot 9,81 \cdot h$$

$$0 = 625 - 19,62 h$$

$$h = 625 / 19,62 = 32,85 \text{ m (S.I.)}$$

Tarda un tiempo en alcanzar esta altura de:

$$V_{f_{p1}} = V_{o_{p1}} + (-g) \cdot t$$

$$0 = 25 - 9,81 \cdot t$$

$$t = 25 / 9,81$$

$$t = 2,54 \text{ s}$$

En este tiempo la piedra 2 habrá subido una altura de:

$$h = V_{o_{p2}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2$$

$$h = 30 \cdot 2,54 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (2,54)^2$$

$$h = 76,2 - 31,64 = 44,56 \text{ m}$$

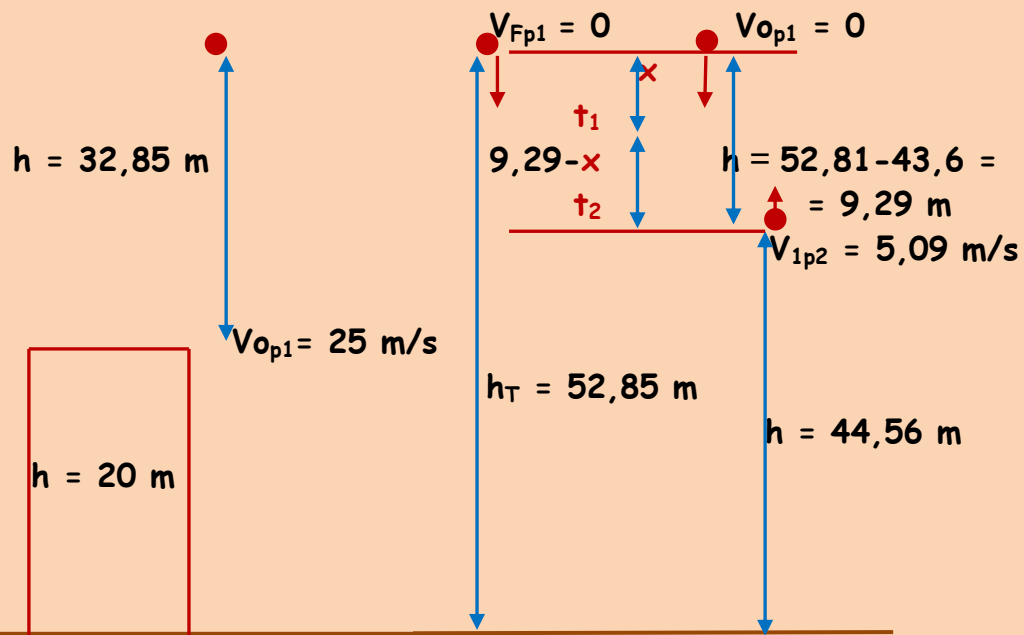
Consigue una velocidad de V_{1p2} :

$$V_{1p2} = V_{o_{p2}} + (-g) \cdot t$$

$$V_{1p2} = 30 - 9,81 \cdot 2,54$$

$$V_{1p2} = 30 - 24,91 = 5,09 \text{ m/s}$$

La nueva situación es:



La piedra 1 descenderá " x " m y la 2 $(9,29 - x)$ m, en un mismo tiempo por lo que:

$$t_1 = t_2 = t$$

$$\text{Piedra 1: } x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1)$$

$$\text{Piedra 2: } 9,29 - x = V_{1p2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2 \quad (2)$$

De (1) despejamos " t " y lo llevamos a (2):

$$t = (2x / g)^{1/2}$$

$$9,29 - x = 5,09 \cdot (2x/g)^{1/2} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot [(2x/g)^{1/2}]^2$$

$$9,29 - x = 5,09 \cdot (2x/g)^{1/2} - x$$

$$9,29 = 5,09 \cdot (2x/g)^{1/2}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado:

$$86,3 = 25,9 \cdot 2x/g$$

$$86,3 \cdot g = 51,8 \cdot x$$

$$86,3 = 51,8 \cdot x$$

$$x = 86,3/51,8$$

$$x = 1,66 \text{ m (S.I.)}$$

Tardarán en encontrarse:

$$t = (2x/g)^{1/2}$$

$$t = (2 \cdot 1,66 / 9,81)^{1/2}$$

$$t_T = 2,54 + t_1 + t_2 = 2,54 + 0,58 + 0,58 = 3,7 \text{ s}$$

La piedra 2 subió en 0,58 s una altura de:

$$h = 9,29 - 1,66 = 7,63 \text{ m}$$

Se encontrarán del suelo a una altura de:

$$h = 44,56 + 7,63 = 52,19 \text{ m}$$

b)

La piedra nº 1, en el punto de encuentro alcanza una velocidad:

$$V_{Fp1} = V_{o_{p1}} + g \cdot t$$

$$V_{Fp1} = 0 + 9,81 \cdot 0,58 = 5,68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La piedra 2 alcanzará una velocidad:

$$V_{Fp2} = V_{1p2} + (-g) \cdot t$$

$$V_{Fp2} = 5,09 - 9,81 \cdot 0,58 = 5,09 - 5,68 = -0,59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

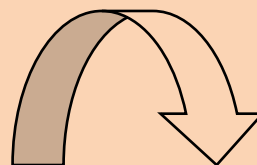
La velocidad de la piedra 2 sale negativa y **NO ES POSIBLE**, el arrastre de decimales puede habernos llevado a este error.

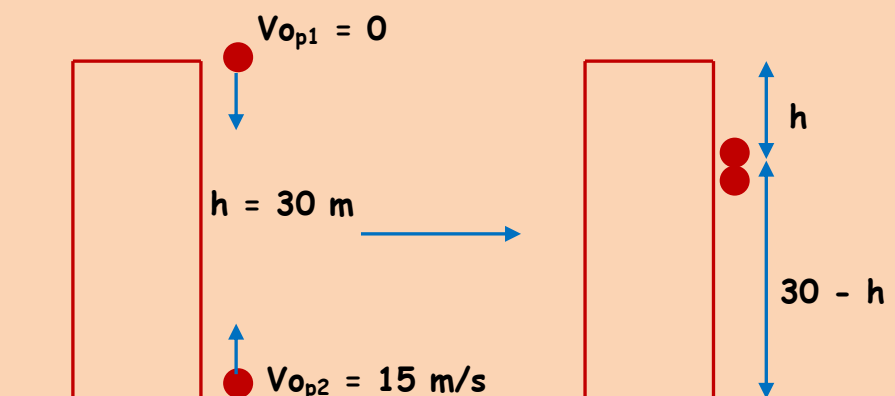
Ejercicio resuelto

Desde lo alto de una torre de 30 m de altura se deja caer una piedra 0,2 s después de haber lanzado hacia arriba otra piedra desde la base a 15 m/s. Calcula el punto de encuentro entre ambas piedras.

Resolución

La situación es la siguiente:





La piedra n° 1 como la piedra n° 2 llevan **M.R.U.A**, siendo el de la 2 **negativo** puesto que la **velocidad disminuye**.

Si la piedra n° 2 tarda en encontrarse con la n° 1 "**t**" segundos, ésta tardará **(t - 0,2) s**.

Piedra n° 1

$$h_{\text{piedra1}} = h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 0,2)^2$$

Piedra n° 2

$$h_{\text{piedra2}} = 30 - h = V_{o_{p2}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Unimos las dos ecuaciones:

$$h_{\text{piedra1}} = h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 0,2)^2 \quad (1)$$

$$h_{\text{piedra2}} = 30 - h = V_{o_{p2}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (2)$$

Se forma un sistema de ecuaciones. Llevamos "**h**" de la (1) y lo llevamos a la (2):

$$30 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - 0,2)^2 = 15 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$60 - g \cdot (t - 0,2)^2 = 30 \cdot t + g \cdot t^2$$

$$60 - 9,81 \cdot (t^2 + 0,04 - 0,4t) = 30t + 9,81t^2$$

$$60 - 9,81t^2 - 0,39 - 3,92t = 30t + 9,81t^2$$

$$19,62t^2 + 3,92t + 30t + 0,39 - 60 = 0$$

$$19,62t^2 + 33,92t - 59,61 = 0$$

$$t = \frac{-33,92 \pm (1150,56 + 4678,19)^{1/2}}{39,24}$$

$$t = \frac{-33,92 \pm 76,34}{39,24}$$

$$t_1 = \frac{-33,92 + 76,34}{39,24} = 1,08 \text{ s}$$

$$t_2 < 0 \text{ No tiene sentido físico}$$

Se encontrarán:

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (1,08)^2 = 5,72 \text{ m.}$$

30 - 5,72 = 24,28 m del suelo (Tomando el suelo como sistema de referencia).

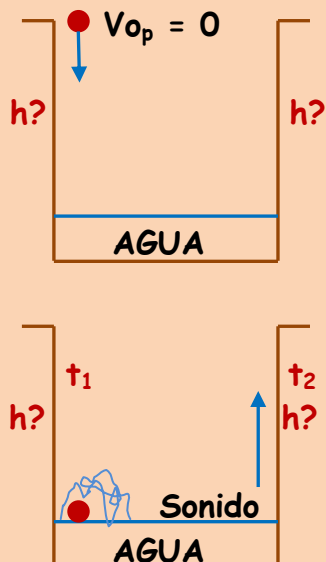
Ejercicio resuelto

Desde que se deja caer una piedra en un pozo, hasta que se oye el sonido transcurren 2 s, calcula la profundidad del pozo.

Dato: $V_{\text{sonido}} = 340 \text{ m/s}$

Resolución

La experiencia gráficamente podría ser:



En esta experiencia sabemos:

- Que la piedra cae con **M.R.U.A** y el sonido sube con **M.R.U.**
- La **altura** (profundidad) que **baja** la piedra es igual a la **altura** que **sube** el sonido. Le llamaremos "**h**".
- Si t_1 es el tiempo que tarda la piedra en llegar al agua y t_2 el tiempo que tarda el sonido en subir a la superficie:

$$t_1 + t_2 = 2 \quad (1)$$

Piedra

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

Sonido

$$h = V_{\text{sonido}} \cdot t_2$$

Como los dos primeros miembros de las ecuaciones anteriores son iguales, los dos segundos también lo serán:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = V_{\text{sonido}} \cdot t_2 \quad (2)$$

Si tenemos en cuenta la ecuación (1) podemos escribir que:

$$t_2 = 2 - t_1$$

Llevamos t_2 a la ecuación (2) y nos queda:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = V_{\text{sonido}} \cdot (2 - t_1)$$

Sustituyendo datos:

$$\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t_1^2 = 340 \cdot (2 - t_1)$$

$$4,9 t_1^2 = 680 - 340 t_1$$

$$4,9 t_1^2 + 340 t_1 - 680 = 0$$

$$t_1 = - 340 \pm (115600 + 13328)^{1/2} / 9,81$$

$$t_1 = - 340 \pm 359,09 / 9,81$$

$$t_1 = 1,94 \text{ s}$$

La segunda solución de la ecuación no tiene sentido físico puesto que nos proporciona un valor negativo para el tiempo.

La profundidad del pozo:

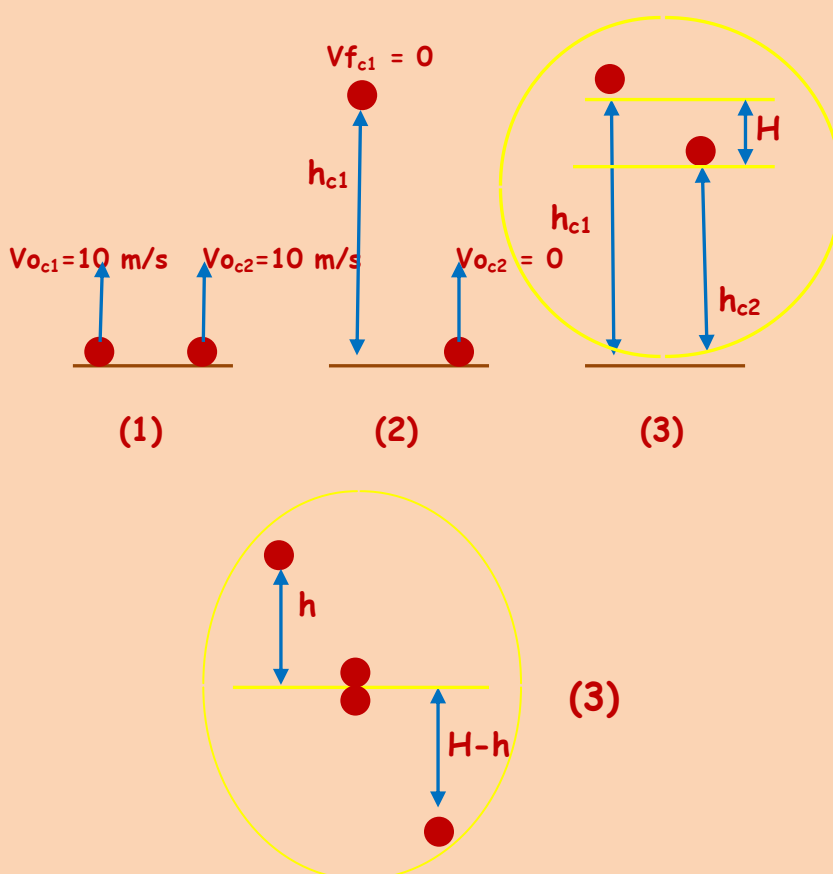
$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (1,94)^2 = 18,46 \text{ m.}$$

Ejercicio resuelto

Se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 10 m/s, al cabo de un segundo se lanza otro cuerpo con la misma velocidad. Calcula a qué altura se produce el encuentro entre los dos objetos y la velocidad que lleva cada uno.

Resolución



El esquema anterior es una explicación muda de lo que está ocurriendo en nuestra experiencia. Ahora pasaremos al cálculo de variables establecidas en el croquis anterior.

Cuerpo N° 1

$$V_{o1} = 10 \text{ m/s}$$

a)

Máxima altura alcanzada:

$$V_{f_{c12}}^2 = V_{o_{c1}}^2 + 2 \cdot (-g) \cdot h_{c1}$$

$$V_{f_{c1}} = 0$$

$$0 = 10^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot h_{c1}$$

$$0 = 100 - 19,62 h_{c1}$$

$$19,62 h_{c1} = 100$$

$$h_{c1} = 100 / 19,62 = 5,09 \text{ m.}$$

b)

Tiempo empleado en alcanzar dicha altura:

$$V_{f_{c1}} = V_{o_{c1}} + (-g) \cdot t_{c1}$$

$$0 = 10 - 9,81 \cdot t_{c1}$$

$$t_{c1} = 10 / 9,81 = 1,02 \text{ s}$$

Cuerpo N° 2

a)

Tiempo de subida: $t_{c1} - 1 = 1,02 - 1 = 0,02 \text{ s}$

b)

Altura máxima alcanzada:

$$h_{c2} = Vo_{c2} \cdot t_{c2} + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot (t_{c2})^2$$

$$h_{c2} = 10 \cdot 0,02 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (0,02)^2$$

$$h_{c2} = 0,2 - 0,0019 = 0,19 \text{ m}$$

c)

Velocidad alcanzada:

$$Vf_{c2} = Vo_{c2} + (-g) \cdot t_{c2}$$

$$Vf_{c2} = 10 - 9,81 \cdot 0,02 = 10 - 0,19 = 9,81 \text{ m/s}$$

Punto de encuentro:

Distancia de separación entre los dos cuerpos:

$$H = hc1 - hc2 = 5,09 - 0,19 = 4,9 \text{ m}$$

Cuerpo N° 1:

$$Vo_{c1} = 0$$

a)

Altura descendida:

$$h_{c1} = h = V_{0c1} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{c1}^2$$

$$h_{c1} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{c1}^2$$

$$h_{c1} = 4,9 t_{c1}^2 \quad (1)$$

Cuerpo N° 2:

a)

Altura subida:

$$h_{c2} = 4,9 - h = V_{fc2} \cdot t_{c2} + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t_{c2}^2$$

$$h_{c2} = 9,81 \cdot t_{c2} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (t_{c2})^2$$

(2)

Los tiempos de bajada del cuerpo N° 1 y de subida del cuerpo N° 2 son iguales:

$$t_{c1} = t_{c2} = t$$

Las ecuaciones (1) y (2) quedarían de la forma:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$h = 4,9 \cdot t^2 \quad (3)$$

$$4,9 - h = V_{fc2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (4)$$

Si despejamos de (3) el tiempo "**t**" y lo llevamos a la ecuación (4), nos queda:

$$t = (h / 4,9)^{1/2}$$

$$4,9 - h = 9,81 \cdot (h/4,9)^{1/2} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot [(h/4,9)^{1/2}]^2$$

$$4,9 - h = 9,81 \cdot (h/4,9)^{1/2} - 4,9 \cdot (h/4,9)$$

$$4,9 - h = 9,81 \cdot (h/4,9)^{1/2} - h$$

Reduciendo términos semejantes:

$$4,9 = 9,81 \cdot (h/4,9)^{1/2}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$(4,9)^2 = (9,81)^2 \cdot h/4,9$$

$$24,01 = 19,64 h$$

$$h = 24,01/19,64 = 1,22 \text{ m}$$

La altura que sube el cuerpo N°2 al encuentro del N° 1 es:

$$h_{c2} = 4,9 - 1,22 = 3,68 \text{ m}$$

Los cuerpos se encuentran:

$$h_{c2}(\text{inicial}) + (h - 4,9) = 0,19 + 3,68 = 3,87 \text{ m} \quad (\text{Sobre el suelo que es nuestro sistema de referencia})$$

En lo referente a la velocidad con la que llegan los cuerpos al punto de encuentro:

Cuerpo N° 1

Tiempo de bajada:

$$t = (h/4,9)^{1/2}$$

$$t = (1,22/4,9)^{1/2} = 0,49 \text{ s}$$

$$V_{\text{encuentro}c1} = V_{0c1} + g \cdot t$$

$$V_{\text{encuentro}c1} = 0 + 9,81 \cdot 0,49 = 4,8 \text{ m.s}^{-1}$$

Cuerpo N° 2

Tiempo de subida = 0,49 s

Velocidad de encuentro:

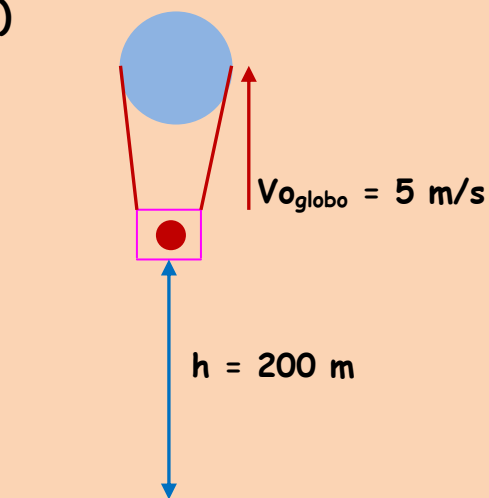
$$V_{\text{encuentro}c2} = V_{fc2} + (-g) \cdot t = 9,81 - 9,81 \cdot 0,49 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ejercicio resuelto

Un globo asciende con una velocidad constante de 5 m/s. Cuando se encuentra a 200 m de altura, se deja caer un lastre. Despreciando rozamientos, calcular, a) el tiempo que emplea el lastre en llegar al suelo; b) la velocidad con la que llega al suelo

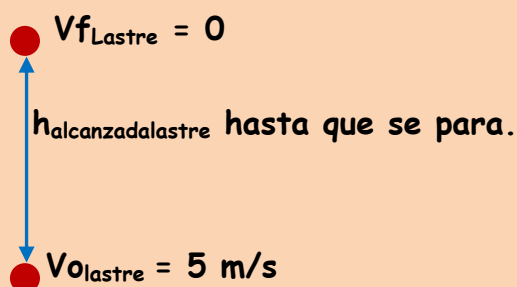
Resolución

a)



El lastre por formar parte del globo lleva una velocidad inicial igual a la del globo (**5 m/s**).

Cuando el lastre quede en libertad seguirá subiendo hasta que su velocidad sea nula y empiece a descender. El globo seguirá subiendo a la misma velocidad.



Calculemos la altura alcanzada:

$$V_{\text{f}_{\text{lastre}}}^2 = V_{\text{o}_{\text{lastre}}}^2 + 2 \cdot (-g) \cdot h_{\text{lastre}}$$

$$V_{\text{f}_{\text{lastre}}} = 0$$

$$0 = 5^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot h_{\text{lastre}}$$

$$h_{\text{lastre}} = 25 / 2 \cdot 9,81 = 25/19,62 = 1,27 \text{ m}$$

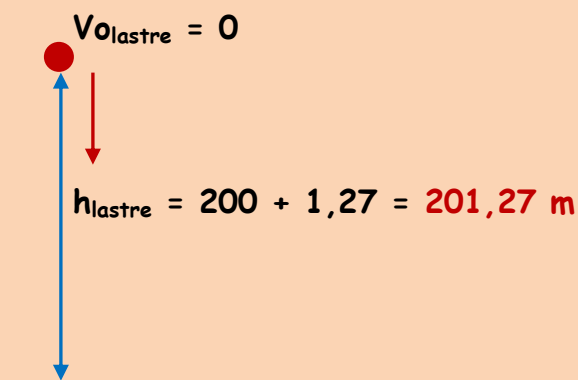
Tarda un tiempo en alcanzar dicha altura:

$$V_{f_{\text{lastre}}} = V_{o_{\text{lastre}}} + (-g) \cdot t$$

$$0 = 5 - 9,81 \cdot t$$

$$t = 5 / 9,81 = 0,5 \text{ s}$$

El lastre se encuentra ahora a una altura del Sistema de Referencia (suelo):



El tiempo que tarda el lastre en llegar al suelo lo podemos calcular:

$$h = V_{o_{\text{lastre}}} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$V_{o_{\text{lastre}}} = 0$$

$$h = 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$201,27 = 4,9 t^2$$

$$t = (201,27/4,9)^{1/2}$$

$$t = 6,4 \text{ s}$$

El tiempo total en llegar el lastre al suelo:

$$t_T = t_{\text{subidalastre}} + t_{\text{bajadalastre al suelo}} =$$

$$= 0,5 + 6,4 = 6,9 \text{ s}$$

b)

La velocidad con la que llega al suelo:

$$V_{f_{\text{lastre}}} = V_{o_{\text{lastre}}} + g \cdot t$$

$$V_{f_{\text{lastre}}} = 0 + 9,81 \cdot 6,4 = 62,97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

----- O -----