Tema Nº 3
Composición de Movimientos

Contenido Temático

1.- Composición de Movimientos

Cuando un cuerpo se encuentra sometido a dos movimientos simultáneos e independientes, efectúa un movimiento que es combinación de ellos. Obtenemos un Movimiento Compuesto.

Los movimientos compuestos se basan en el principio:

Principio de superposición:

La posición, velocidad y aceleración vienen dados por la suma vectorial de los movimientos parciales: El vector de posición $\vec{r}$ del móvil será la suma vectorial de los dos vectores de posición. El vector velocidad $\vec{v}$ resultante, es la suma vectorial de las velocidades de cada movimiento. Si los movimientos transcurren en ejes distintos, se pueden considerar independientes. El tiempo es la única magnitud común para ambos.

Para poder afrontar todas las posibilidades de los Movimientos Compuestos tendremos que:

a) Distinguir claramente la naturaleza de cada uno de los movimientos simples que lo componen
b) Aplicar a cada movimiento sus propias ecuaciones

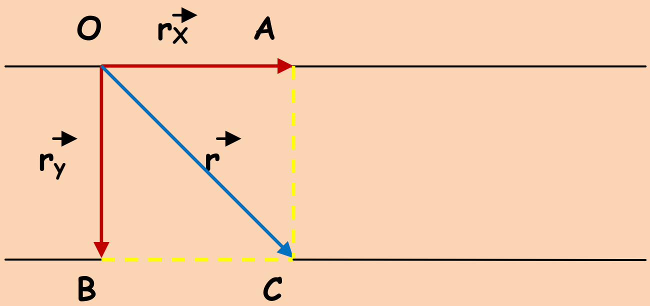
Nos encontramos con tres tipos de Movimientos Compuestos:

1.- Composición de dos M.R.U. perpendiculares
2.- Tiro Horizontal (un M.R.U y otro M.R.U.A.)
3.- Tiro Oblicuo (un M.R.U y otro M.R.U.A.)

2.- Composición de dos movimientos M.R.U. y perpendiculares entre sí (Cruce de un río)

Animación: Cruce de un río
www.educaplus.org/movi/4_1rio.html

El movimiento del nadador que atraviesa un río es un movimiento compuesto. Su cambio de posición es OC y es debido al esfuerzo del nadador para recorrer OB y al arrastre del agua del río:



Si $\vec{r}$ es el vector posición del movimiento resuñltante y $\vec{r}_x$ y $\vec{r}_y$ los de los movimientos componentes podemos establecer vectorialmente que:

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$$

Recordemos que el vector velocidad viene dado por la ecuación:

$$V = d\vec{r}/dt$$

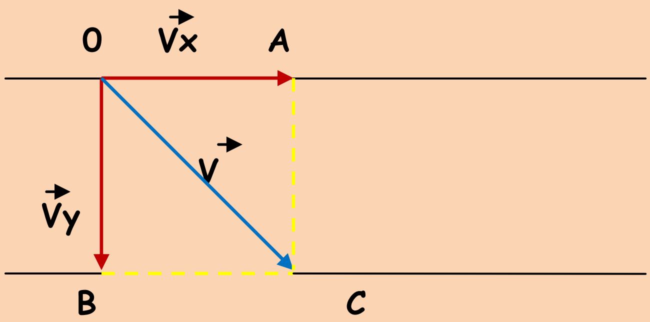
Si en la ecuación anterior sustituimos la ecuación (1) nos queda:

$$\vec{V} = d(\vec{r}_x + \vec{r}_y)/dt$$

$$\vec{V} = d\vec{r}_x/dt + d\vec{r}_y/dt$$

Por lo que:

$$\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y$$



En donde:

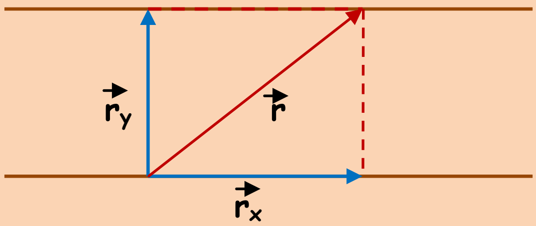
$Vx = V_{agua}$
$Vy = V_{nad.}$

Ejercicio resuelto

Un nadador atraviesa un río de 60 m de ancho al mismo tiempo que es arrastrado por la corriente del agua 100 m ¿Qué espacio ha recorrido? Ayúdate de un dibujo.

Resolución

Elegimos Sistema de referencia unos ejes de coordenadas catesianas que tienen su origen en la posición del nadador antes de iniciar su movimiento:



El nadador ha desarrollado un desplazamiento a lo largo del eje OX igual a 100 m:

$\vec{r}_x = 100\ \vec{i}$

En el eje OY su desplazamiento tiene por ecuación:

$\vec{r}_y = 60\ \vec{j}$

Su desplazamiento total viene determinado por el vector $\vec{r}$:

$\vec{r} = 100\ \vec{i} + 60\ \vec{j}$

El módulo de dicho vector equivale al espacio recorrido por el nadador puesto que el movimiento es rectilíneo:

$$|\vec{r}| = (rx^2 + ry^2)^{1/2} = (100^2 + 60^2)^{1/2} = (10000 + 3600)^{1/2} =$$

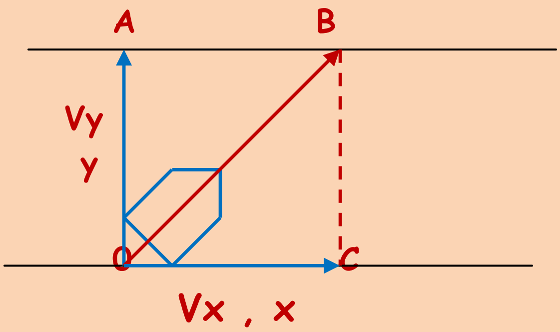
$$= (13600)^{1/2} = 10,79 \text{ m (S.I.)}$$

Ejercicio resuelto

Una barca cruza un río con una velocidad de 0,5 m/s perpendicular a la corriente. Si la corriente del río tiene una velocidad de 3 m/s y el río tiene 100 m de ancho, calcula el punto de llegada de la barca.

Resolución

La barca realizará un movimiento resultante de otros dos cuyo croquis viene dado en la figura adjunta:



En donde:

Y = Anchura del río = 100 m
Vy = Velocidad de la barca perpendicular al segmento OB
= 0,5 m/s
Vx = Velocidad según la corriente del agua del río V = 3 m/s
X = Espacio recorrido en el eje OX y lo que nos pide conocer el ejercicio. El segmento AB es igual al segmento OC.

Si logramos conocer el segmento OC conoceremos el espacio recorrido en la orilla opuesta:

Para ello es importante resaltar el hecho de que el tiempo empleado en recorrer OA es el mismo en recorrer OC:

$t_{OA} = t_{OC}$

Como se trata de M.R.U.:

$e = V \cdot t$

Deducimos:

$Y = Vy \cdot t_{OA}$

Despajando t_{OA}:

$t_{OA} = y/Vy = 100\ \cancel{m}/0,5\ \cancel{m}/s = 200\ s$

Este tiempo es el mismo en recorrer "x" y por lo tanto:

$X = Vx \cdot t_{OC} = 3\ m/\cancel{s} \cdot 200\ \cancel{s} = 600\ m$

Como el segmento OC es equivalente al segmento AB, por geometría o equipolencia vectorial, podemos afirmar que la barca llegará a la orilla opuesta 600 m más abajo en el sentido del desplazamiento del agua.

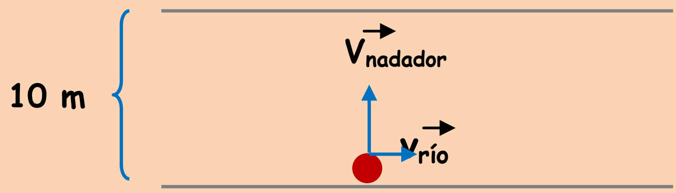
Ejercicio resuelto

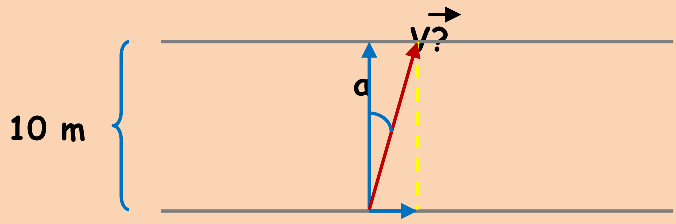
Un nadador quiere atravesar un río de 10 m de anchura con una velocidad de 5 m/s. La corriente del agua lleva una velocidad de 2,5 m/s. Determinar:

a) La velocidad con la que atravesará el rió
b) El ángulo descrito por el nadador en su desplazamiento.
c) El tiempo empleado en atravesar el río
d) El punto de la orilla opuesta que alcanza el nadador.
e) Si queremos que llegue al punto opuesto de su posición inicial ¿qué ángulo tendrá que desplazarse hacia la izquierda?.
f) En base al apartado anterior ¿qué tiempo tardaría en atravesar el río?.

Resolución

a)





La velocidad resultante:

$$|\vec{V}|^2 = |\vec{v}_n|^2 + |\vec{v}_r|^2$$

$$|\vec{V}| = [(5^2 + (2,5)^2)]^{1/2} = 5,59 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b)

En el triángulo rectángulo de la figura:

$\text{sen}\ \alpha = v_{rio}/|\vec{v}|$

$\text{sen}\ \alpha = 2{,}5\ \cancel{m}\ .\ \cancel{s^{-1}}/5{,}59\ \cancel{m}\ .\ \cancel{s^{-1}} = 0{,}44 \rightarrow \alpha = 26{,}1°$

c)

El nadador atravesará el río con su componente $\vec{v}_n$. Es la única componente que posee en la dirección de la orilla opuesta. Como lleva una velocidad de 5 m/s, la anchura del río es de 10 m:

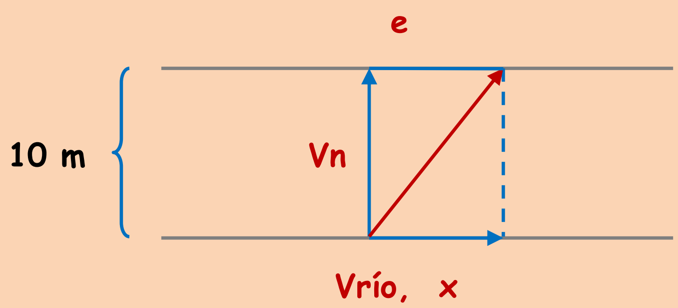
$v_n = e/t$

Despejando el tiempo:

$t = e/v_n$

$t = 10\ \cancel{m}\ /\ 5\ \cancel{m}\ .\ s^{-1} = 2\ s$

d)



x = Espacio recorrido por el río = Espacio recorrido en la orilla opuesta = e

El nadador se desplaza hacia la derecha por la acción de la velocidad del agua del río, 2,5 m/s:

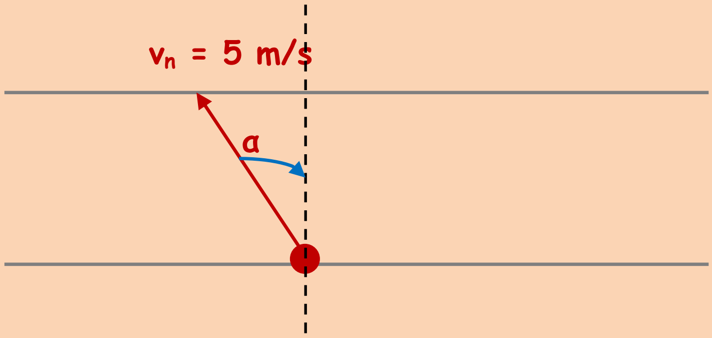
$e = v_{río} \cdot t$

$e = 2,5\ m \cdot \cancel{s}^{-1} \cdot 2\ \cancel{s} = 5\ m$ [1]

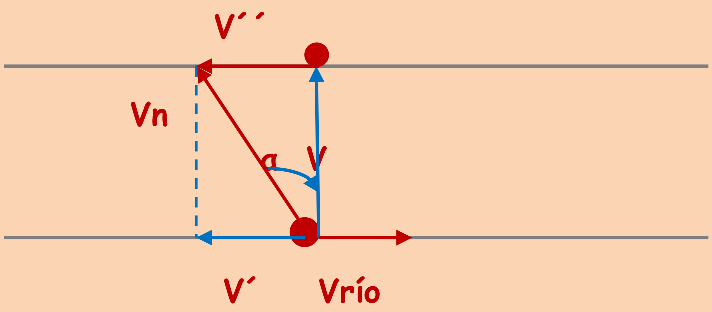
[1] A la derecha de la perpendicular del nadador

e)

Para que el nadador llegue al punto opuesto el nadador debe desplazarse un ángulo hacia la izquierda:



De esta forma podemos descomponer Vn en sus dos componentes según unos ejes de coordenadas que pasa por la posición inicial del nadador:



El valor de V´debe ser el mismo que Vrío para que se cumpla: V´ y Vrío son dos vectores del mismo módulo, igual dirección pero de sentido contrario haciendo posible que las dos velocidades se anulen mutuamente y solo quede la "V" que llevará al nadador al punto opuesto.

V´y V´´ son iguales (2,5 m/s) por equipolencia de vectores.

En el triángulo de la figura anterior se cumple:

sen α = Cateto opuesto / Hipotenusa

sen α = V´/ Vn = 2,5 $\cancel{m/s}$ / 5 $\cancel{m/s}$ = 0,5 → α = 30º

f)

e = anchura río = V . t´ (1)

Debemos conocer el valor de V. Nos basamos en el dibujo anterior:

$Vn^2 = V'^2 + V^2$

$V^2 = Vn^2 - V'^2$

$V = (5^2 - 2,5^2)^{1/2}$ = (18,75)1/2 = 4,33 m/s (S.I.)

Nos vamos a (1):

10 m = 4,33 m/s . t´

t´= 10 m / (4,33 m/s) = 2,3 s

Simulador de movimientos: Nadador en un río
http://www.educaplus.org/play-108-Cruzar-el-r%C3%ADo.html

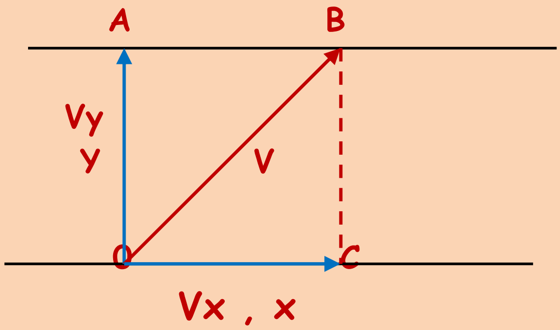
Ejercicio resuelto

Un nadador quiere cruzar un rio de 300 m. de ancho. Si el rio baja a 3 m/s. y el nadador nada perpendicular a la orilla a 4 m/s. ¿Qué distancia se desviará sobre la perpendicular? ¿Qué ángulo se habrá desviado? ¿Cómo debe cruzar el rio para no desviarse y llegar a la otra orilla en el punto perpendicular al de salida?.

Resolución

a)

Croquis del movimiento:



En donde:

Vy = Vnadador = 4 m/s
Y = Anchura río = 300 m
Vx = Vrio = 3 m/s
X = ?

a)

Tiempo transcurrido en atravesar el río:

$e = V . t$

$Y = V_y . t_y$

Despejando t_y:

$t_y = y/V_y = 300\ m / 4\ m/s = 75\ s$

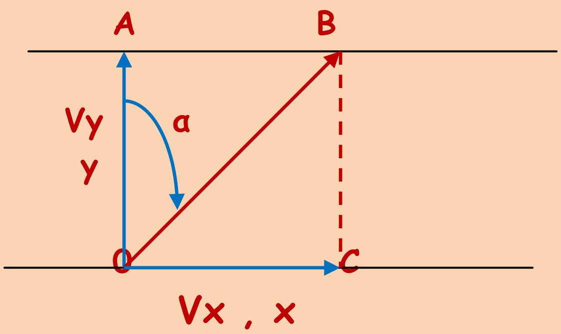
b)

El tiempo (t = 75 s) es el mismo empleado en recorrer "x". Luego:

$X = V_x . t_x = 3\ m/\cancel{s} . 75\ \cancel{s} = 225\ m$

c)

Respecto al ángulo:



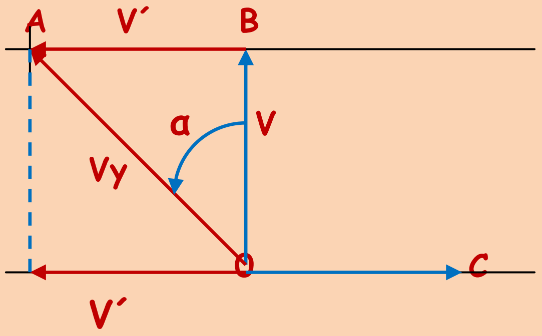
Por Trigonometría:

$tag\ \alpha = x/y$ (1)

Nos vamos a (1):

$tag\ \alpha = 225\ \cancel{m}/300\cancel{m} = 0{,}75 \rightarrow \quad \alpha = 36{,}86^{\circ}$

d)



Vy = 4 m/s
V´ = 3 m/s (Para anular la Vrío)

Del triángulo OAB:

$sen\ \alpha = V´/Vy$

$sen\ \alpha = 3\ \cancel{m/s}\ /\ 4\ \cancel{m/s} = 0{,}75 \rightarrow \alpha = 48{,}59$

3.- Tiro Horizontal.

Estudio del tiro Horizontal
estudio del tiro horizontal (studylib.es)

Estudio tiro Horizontal (pinchar en ejemplo tiro horizontal)
5. EJEMPLO DE TIRO HORIZONTAL (ugto.mx)

Estudio tiro Horizontal
1.2.2 Tiro Horizontal. - Física 1º Bachillerato (google.com)

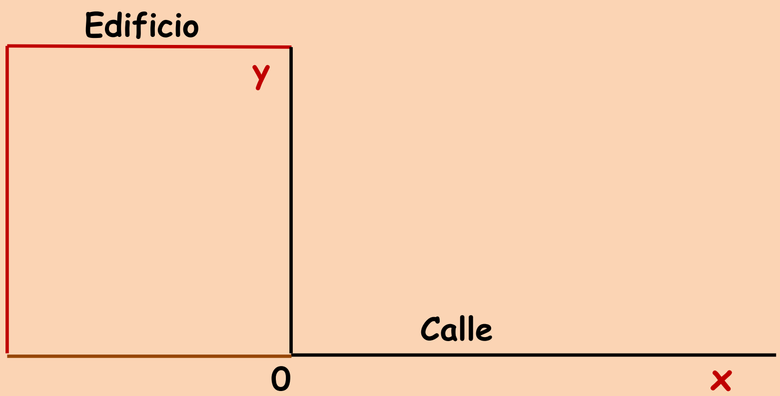
Video: Tiro horizontal
http://www.youtube.com/watch?v=t1WF0w38lYE

Video: Problema de tiro horizontal
http://www.youtube.com/watch?v=_yXIfyE-TJw&feature=related

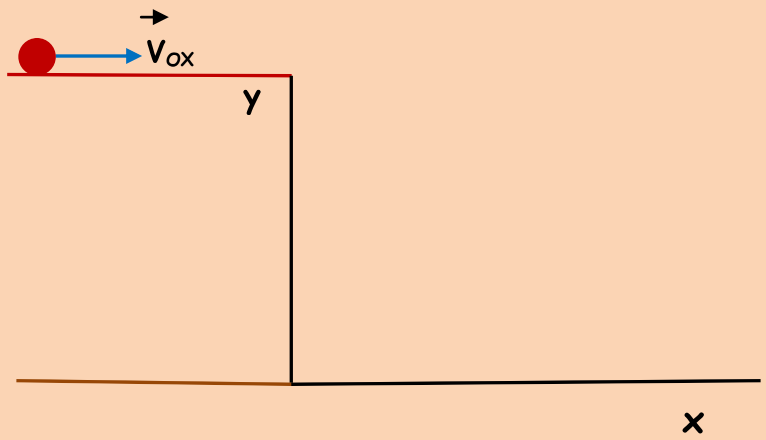
Vídeo: Tiro horizontal
http://www.youtube.com/watch?v=kQPVsBFlAbU

Animación tiro Horizontal
Tiro Horizontal | Educaplus

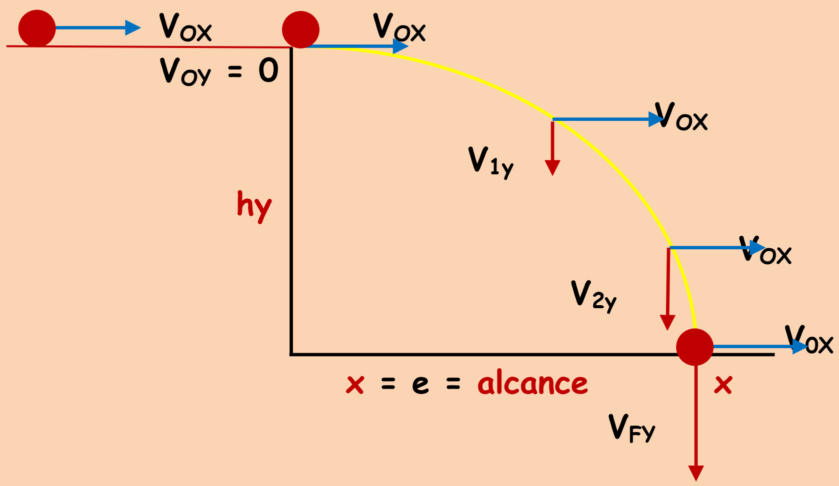
Tenemos un edificio, de altura "h" y la calle de una anchura determinada. La altura del edificio la consideraremos el eje OY mientras que la calle el eje OX.



En la azotea del edificio circula un cuerpo esférico con una velocidad V_{OX} puesto que el vector velocidad es paralelo al eje OX:



En esta situación no existe la componente $\vec{V}y$ de la velocidad. Cuando el cuerpo llega al vacío permanecerá la $\vec{V}_{OX}$ (que permanece constante ya que no existe fuerza que aumente o disminuya la velocidad) y aparecerá la componente $\vec{V}y$ por la acción de la gravedad haciendo posible que la trayectoria seguida por el cuerpo sea de tipo parabólico:



Al actuar la "gravedad" la componente Vy aumenta a medida que se produce el movimiento.

En el eje OX (calle) al permanecer la velocidad constante el movimiento es M.R.U.. Mientras que en el eje OY el movimiento es M.R.U.A. puesto que la velocidad aumenta.

El movimiento de la bola lo puedo estudiar en el eje OX por un lado y en el eje OY por otro. Es decir, con el dedo índice de la mano izquierda desciendo la altura del edificio y con el índice de la derecha me desplazo por eje OX.

Estudio del movimiento en el eje OX:

M.R.U → $x = \text{alcance} = e = V_{OX} \cdot t$

Estudio del movimiento en el eje OY:

M.R.U.A.

$hy = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

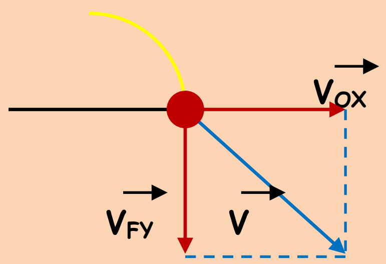
$V_{FY}^2 = V_{OY}^2 + 2 \cdot g \cdot hy$

Sabemos que $V_{OY} = 0$

$V^2_{FY} = 2 \cdot g \cdot h$

Es muy importante saber que el tiempo que tarda la bola en caer la altura del edificio es el mismo que tarda el cuerpo en recorrer el alcance.

Si queremos conocer la velocidad en el punto de llegada en la calle:



Vectorialmente:

$\vec{V} = \vec{V}_{OX} + \vec{V}_{OY}$

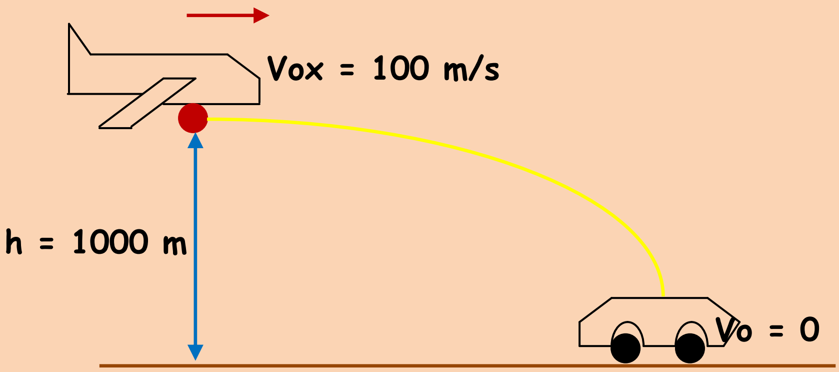
$|\vec{V}| = (V_{OX}^2 + V_{OY}^2)^{1/2}$

Ejercicio resuelto

Un avión, que vuela horizontalmente a 1000 m de altura con una velocidad constante de 100 m/s, deja caer una bomba para que dé sobre un vehículo que está en el suelo. Calcular a qué distancia del vehículo, medida horizontalmente, debe soltar la bomba.

Resolución

Es importante recordar que el tiempo en recorrer el eje OY (caída con M.R.U.A.) es el mismo que en recorrer el eje OX (alcance con M.R.U.) y que llamaremos "t".



a)

Vehículo parado
Vox = 100 m/s
h = 1000 m
Vo = 0

Al quedar libre la bomba tardará en caer los 1000 m de altura:

$h = Voy \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$Voy = 0$

$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$1000 = 4,9\ t^2$

$t = (1000/4,9)^{1/2} = 14,28\ s\ (S.I.)$

Con este tiempo la bomba recorrerá una distancia igual al alcance y el avión se encontrará en la vertical del coche

$x = Vox \cdot t$

$x = 100\ m/\cancel{s} \cdot 14,28\ \cancel{s} = 1428\ m$

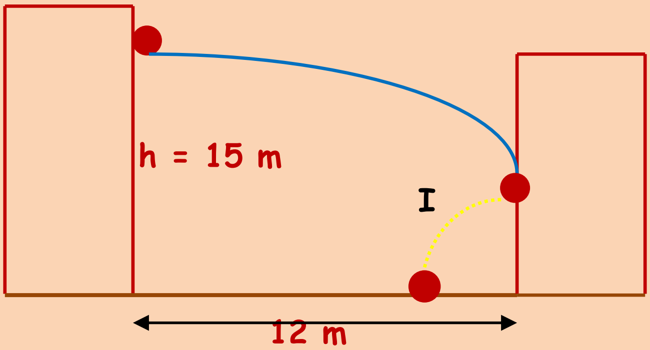
El avión deberá dejar en libertad la bomba 1428 m antes de llegar al objetivo.

Ejercicio resuelto

Por la ventana de un edificio, a 15 m de altura, se lanza horizontalmente una bola con una velocidad de 10 m/s. Hay un edificio enfrente, a 12 m, más alto que el anterior. A) Choca con el edificio de enfrente o cae directamente al suelo?. B) Si tropieza contra el edificio ¿a qué altura del suelo lo hace?. Tomar $g = 10\ m/s^2$.

Resolución

La situación es la siguiente:



Para establecer la posibilidad del dibujo calcularemos el tiempo que tarda la pelota en caer al suelo, verticalmente:

$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$15 = 5 \cdot t^2$

$t = (15/5)^{1/2} = 1,73\ s$

Este es el tiempo que la pelota está cayendo y que será igual al tiempo empleado en recorrer el eje OX (desplazamiento). Con este tiempo recorrerá un espacio:

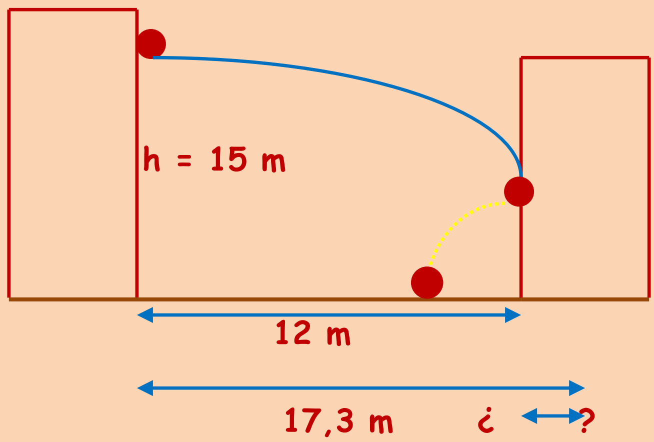
$x = V_{móvil} \cdot t$

$x = 10\ m/s \cdot 1,73\ s = 17,3\ m$

Como la anchura de la calle es de 12 m la hipótesis planteada es cierta y la pelota chocará con la pared del edificio de enfrente.

b)

Como la calle tiene una anchura de 12 m y el alcance de la pelota es 17,3 m, existe una diferencia de longitud:



El espacio perdido en el desplazamiento es:

17,3 – 12 = 5,3 m

Esta longitud, 5,3 m, implica una altura de choque que es lo que nos pide el problema. La perdida de desplazamiento implica un tiempo que será igual al tiempo que se pierde en la caída en vertical de la pelota. Esta longitud por pertenecer al eje de OX, se recorrerá con M.R.U.:

$x = V_{móvil} \cdot t$

$t = x / V_{móvil}$

$t = 5,3 \cancel{m}/(10 \cancel{m}/s) = 0,53\ s$

Este tiempo es el que pierde la pelota en su caída vertical.

El tiempo en el cual se produce el choque es:

$t = t_T - t_{perdido}$ = 1,73 s – 0,53 s = 1,2 s

En 1,2 s la pelota habrá descendido una altura:

$h = Vo_{pelota} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$h = 0 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1,2)^2$

h = 7,2 m

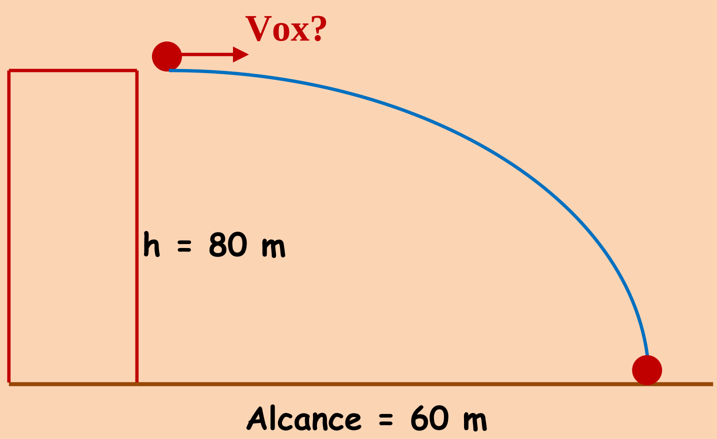
Como el total de la altura es de 15 m el punto de choque estará a una altura de:

$h_{choque} = h_T - h_{choque}$ = 15 – 7,2 = 7,8 m

Ejercicio resuelto

Desde la azotea de un edificio de 80 m de alto se lanza horizontalmente una pelota y golpea en el suelo a 60 m de la base. ¿Cuál fue la rapidez con que se lanzó la pelota?

Resolución



h = 80 m
Desplazamiento = 60 m

La altura descendida por el cuerpo en el eje OY implica un tiempo:

$h = Voy \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$Voy = 0$

$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$80 = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot t^2$

$t = (160 / 9,81)^{1/2}$

$t = 4,03\ s$

Este tiempo es el mismo con el cual se recorre el desplazamiento en el eje OX con M.R.U.. Conociendo el tiempo y el valor del desplazamiento podemos conocer la velocidad inicial de la pelota en el eje OX:

Vox = Desplazamiento / t

$Vox = 60\ m / 4,03\ s = 14,88\ m \cdot s^{-1}$

Ejercicio resuelto

Un avión de combate, que vuela horizontalmente sobre el océano a 1800 Km/h, suelta una bomba. Ocho segundos después, la bomba hace impacto en el agua.

a) **¿A qué altitud volaba el avión?.**
b) **¿Qué distancia recorrió la bomba horizontalmente?.**
c) **¿Cuál es la magnitud y dirección de la velocidad de la bomba justo antes de hacer el impacto?**

Resolución

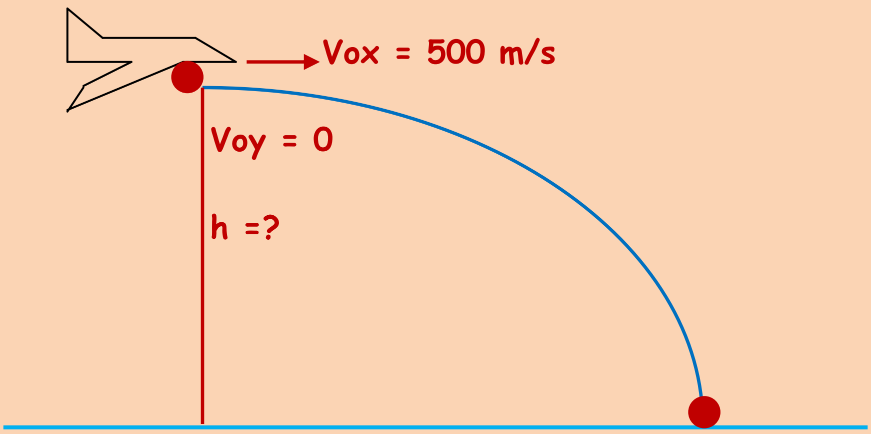
Cambio de unidades:

$$V_{ox} = (1800\ K\cancel{m}/\cancel{h}) . (1000\ m/1\ \cancel{K}m) . (1\ \cancel{h}/3600\ s) = 500\ m/s$$

$t = 8\ s$

a)

Altitud del avión:



En el OY nos movemos con M.R.U.A.

$$h = V_{oy} . t + \frac{1}{2} . g . t^2$$

Voy = 0

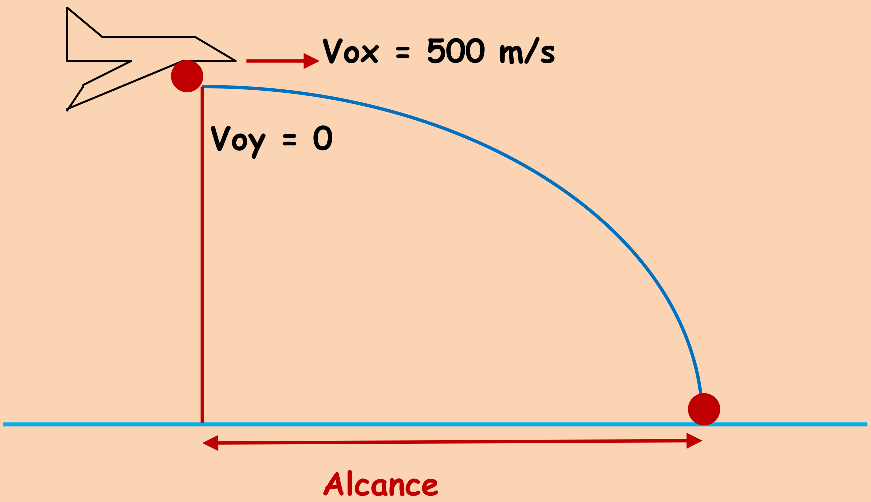
$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 8^2 = 313{,}92$ m (S.I.)

b)

Este apartado nos pide el Alcance, que se recorre en el eje OX con M.R.U.

Recordar que en el tiro horizontal el tiempo de caída en el eje OY es igual al tiempo que se emplea en el eje OX para establecer el Alcance:

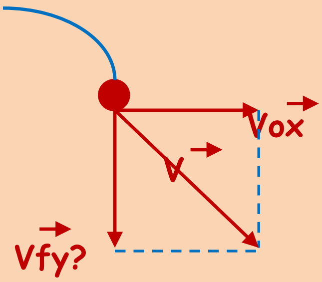


Alcance = Vox . t

Alcance = 500 m/$\cancel{s}$. 8 $\cancel{s}$ = 4000 m

c)

En el punto de contacto con el agua la velocidad del proyectil tiene dos componentes:



$\vec{V} = \vec{Vox} + \vec{Vfy}$

$|\ \vec{V}\ |^2 = |\ \vec{Vox}\ |^2 + |\ \vec{Vfy}\ |^2$ (1)

Debemos calcular Vfx:

$Vfy^2 = Voy^2 + 2 \cdot g \cdot h$

$Voy = 0$

$Vfy^2 = 2 \cdot g \cdot h$

$Vfy^2 = 2 \cdot 9{,}81 \cdot 313{,}92$

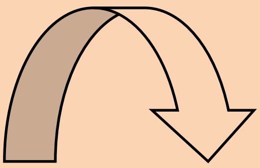
$Vfy = (6159{,}11)1/2 = 78{,}48\ m/s$

Si nos vamos a la ecuación (1):

$V^2 = Vox^2 + Vfy^2$

$V = [(500)^2 + (78{,}48)^2]^{1/2} = (250000 + 6159{,}11)^{1/2}$

$V = 506{,}12\ m/s$ (S.I.)



Ejercicio propuesto

Desde un punto situado a 100 m. sobre el suelo se dispara horizontalmente un proyectil a 400 m/s. Tomar g = 10 m/s^2. Calcular:

a) Cuánto tiempo tardará en caer.
b) Cuál será su alcance.
c) Con qué velocidad llegará al suelo.

R: 4,47 s ; 1788 m ; v = 400 i – 44,7 m/s

Ejercicio resuelto

Una bola que rueda sobre una mesa horizontal de 90 cm de altura, cae al suelo en punto situado a una distancia horizontal de 1,5 m del borde de la mesa. ¿Qué velocidad tenía la bola en el momento de abandonar la mesa?

Resolución

$h = 90\ \cancel{cm}\ .\ 1\ m/100\ \cancel{cm} = 0{,}90\ m$

Desplazamiento = 1,5 m

Cuando la bola abandona la mesa sólo tiene componente Vox de la velocidad.

Eje OX:

Alcance = Vox . t

1,5 = Vox . t (1)

Eje OY

$h = Voy\ .\ t + \frac{1}{2}\ .\ g\ .\ t^2$

$Voy = 0$

$h = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$

$0{,}90 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$ (2)

Recordar que los tiempos son iguales. Podemos despejar "t" de la ecuación (1) y llevarlo a la (2):

$t = 1{,}5 / Vox$

$0{,}90 = 4{,}9 \cdot (1{,}5/Vox)^2$

$0{,}90\ Vox^2 = 4{,}9 \cdot 2{,}25$

$Vox = (11{,}025 / 0{,}90)^{1/2} = 3{,}5\ m/s$

Simulador de Tiro Horizontal.
http://www.educaplus.org/play-109-Tiro-horizontal.html

4.- Tiro Parabólico

Tiro parabólico
http://www.actiweb.es/edufisica/pagina2.html

Video: Tiro parabólico (Animación)
http://www.youtube.com/watch?v=C7JlTyuCRA0&feature=related

Video: Tiro parabólico
http://www.youtube.com/watch?v=dKovgwKYaj4

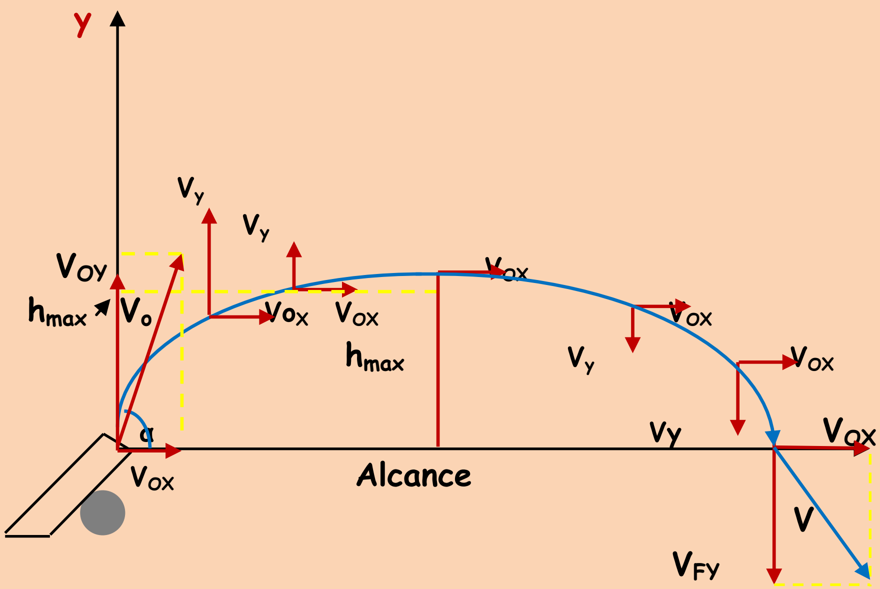
Vídeo: Tiro parabólico
http://www.youtube.com/watch?v=5cbb0wb_oY8&feature=autoplay&list=PL497AA441456B0F17&playnext=2

Video: Tiro parabólico
http://www.youtube.com/watch?v=uhHzc0NW8T8&feature=related

Simulador: Tiro parabólico
http://www.educaplus.org/movi/4_3tparabolico.html

Simulador: Tiro parabólico y horizontal
http://newton.cnice.mec.es/newton2/Newton_pre/1bach/comp_mov/index.html

Para entender el tiro parabólico debéis comprender perfectamente el dibujo que tenemos a continuación:



El cañón dispara el proyectil con una velocidad inicial V_o. Esta velocidad es rápidamente descompuesta en sus dos componentes V_{OX} y V_{OY}. A partir de este momento el movimiento del proyectil transcurre simultáneamente por el eje OX y por el eje OY. Es muy importante que hagáis el juego de los dedos índices de las manos. A pesar de que el movimiento es simultáneo en los dos ejes, vamos a estudiar el movimiento en cada uno de los ejes.

Movimiento en el eje OX:

El espacio recorrido en el eje OX (Alcance) con una velocidad V_{OX} que permanece constante a lo largo de todo el movimiento (no existe fuerza o elemento atmosférico que haga que la velocidad aumente o disminuya). En el dibujo, los vectores V_{OX} intentan ser iguales y paralelos lo que constataría la constancia de dicha velocidad. Según esto el eje OX es recorrido mediante un M.R.U.

El alcance (espacio) viene dado por la ecuación:

$$\text{Alcance} = V_{OX} \,.\, t_x \qquad (1)$$

En la descomposición de Vo se cumple:

$$\cos \alpha = V_{OX} / Vo$$

$$V_{OX} = Vo \,.\, \cos \alpha \quad (2)$$

Llevando (2) a (1):

$$\text{Alcance} = x = Vo \,.\, \cos \alpha \,.\, t_x$$

Dicho de otra forma, la posición del proyectil en el eje OX vendrá dada por la ecuación:

$x = Vo \cdot \cos \alpha \cdot t$

Movimiento en el eje OY:

El proyectil inicia el movimiento con una velocidad ascendente V_{OY}, pero la acción de la gravedad hace que dicha velocidad valla disminuyendo hasta que el proyectil se para alcanzando la "altura máxima" en donde ya NO EXISTE componente V_y. En el dibujo las Vy van siendo cada vez más pequeña hasta que desaparece en el punto de máxima altura.

El eje OY es recorrido por un M.R.U.A (-) puesto que la velocidad de ascenso va disminuyendo. La posición del proyectil en el eje OY vendrá dada por la ecuación:

$y = V_{OY} \cdot t_y + \frac{1}{2} \cdot (- g) \cdot t_y^2$

$y = V_{OY} \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2$ (3)

En la descomposición de Vo:

$\text{sen } \alpha = V_{OY} / Vo$

$V_{OY} = Vo \cdot \text{sen } \alpha$ (4)

Llevando (4) a (3):

$y = Vo \cdot \text{sen } \alpha \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2$

La altura máxima se podrá conocer por la ecuación:

$h_{max} = Vo \cdot sen\ \alpha \cdot t_y - ½ \cdot g \cdot t_y^2$ (5)

El tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima ($V_{FY} = 0$) lo podemos conocer:

$V_{FY} = V_{OY} + (- g) \cdot t$

$V_{FY} = Vo \cdot sen\ \alpha - g \cdot t$

Vy= 0 (en el punto de máxima altura)

$0 = Vo \cdot sen\ \alpha - g \cdot t$

$g \cdot t = Vo \cdot sen\ \alpha$

$t = Vo \cdot sen\ \alpha / g$

Podemos llevar el tiempo a la ecuación (5):

$h_{max} = Vo \cdot sen\ \alpha \cdot Vo \cdot sen\ \alpha / g - ½ \cdot g (Vo \cdot sen\ \alpha / g)^2$

$h_{max} = Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha / g - ½ \cdot g \cdot Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha / g^2$

$$h_{max} = ½ \cdot \frac{Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha}{g}$$

Una vez alcanzada la altura máxima vuelve a aparecer la gravedad y la Vy empieza a tomar valor (el índice izquierdo desciende por el eje OY con M.R.U.A (+), mientras el índice derecho sigue avanzando hacia la derecha, con M.R.U, hacia

el punto de impacto del proyectil), cada vez mayor, a medida que nos acercamos al origen de ordenadas, con un valor V_{FY} que es el mismo con la velocidad que llega al punto de impacto.

Si hemos trabajado, jugando bien con los dedos, observaremos que el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima es la mitad del tiempo empleado por el proyectil para obtener el alcance máximo:

$t_y = \frac{1}{2}\, t_x$

$t_x = 2 \,.\, t_y$

En la ecuación que calcula la altura máxima podemos sustituir la condición anterior:

$t = t_y = Vo \,.\, sen\, \alpha \,/\, g$

$t_x = 2\, Vo \,.\, sen\, \alpha \,/\, g$ **(tiempo necesario para recorrer el alcance máximo)**

Podemos llevar t_x a la ecuación del alcance:

$Alcance = Vo \,.\, cos\, \alpha \,.\, t_x$

$Alcance = Vo \,.\, cos\, \alpha \,.\, 2 \,.\, Vo \,.\, sen\, \alpha \,/\, g$

$Alcance = Vo^2 \,.\, 2\, sen\, \alpha \,.\, cos\, \alpha \,/\, g$

$$Alcance_{max} = \frac{Vo^2 \,.\, sen\, 2\alpha}{g}$$

En un instante "t" el proyectil se encuentra en el punto P(x,y). Las coordenadas de P son:

$x = Vo \cos \alpha . t$

$t = x / Vo \cos \alpha$

El tiempo lo llevamos a la ecuación:

$y = Vo \text{ sen } \alpha \, t - \frac{1}{2} . g . t^2$

Nos queda:

$y = Vo \text{ sen } \alpha . x / Vo \cos \alpha - \frac{1}{2} . g . (x / Vo \cos \alpha)^2$

$y = Vo \text{ sen } \alpha . x / Vo \cos \alpha - \frac{1}{2} . g . (x^2 / Vo^2 . \cos^2 \alpha)$

$y = (\text{sen } \alpha / \cos \alpha) . x - \frac{1}{2} \quad g . x^2 / Vo^2 . \cos^2 \alpha$

$y = \text{tag } \alpha . x - \frac{1}{2} \; g . x^2 / Vo^2 \cos^2 \alpha$

Observando la ecuación vemos que se trata de una ecuación del tipo:

$y = f (x)$

Expresión de la ecuación de la trayectoria del movimiento, luego la ecuación:

$y = \text{tag } \alpha . x - \frac{1}{2} \; g . x^2 / Vo^2 \cos^2 \alpha$

Es la ecuación de la trayectoria del tiro parabólico.

Podemos realizar un resumen de las ecuaciones del tiro Parabólico:

Ecuación del Alcance Máximo:

$$Alcance_{max} = \frac{Vo^2 \cdot sen\ 2\alpha}{g}$$

La altura máxima se podrá conocer por la ecuación:

$$h_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha}{g}$$

Tiempo en alcanzar la Altura Máxima:

$t = Vo \cdot sen\ \alpha / g$

Tiempo para alcanzar el Alcance Máximo:

$t_x = 2\ Vo \cdot sen\ \alpha / g$

Ecuación de la Trayectoria:

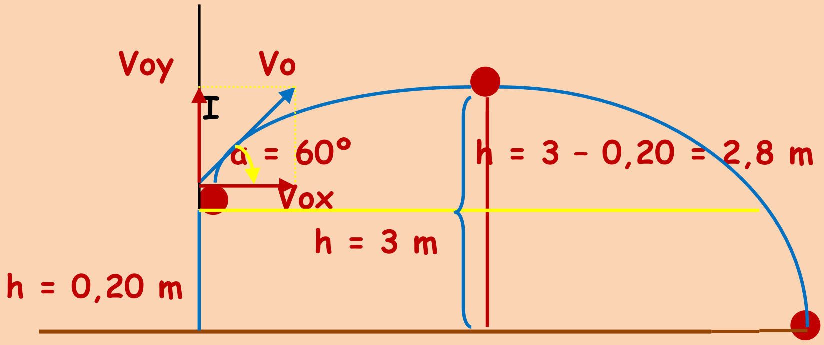
$y = tag\ \alpha \cdot x - \frac{1}{2}\ g \cdot x^2 / Vo^2 \cos^2 \alpha$

Ejercicio resuelto

Un niño da un puntapié a u balón que está a 20 cm del suelo, con un ángulo de 60° sobre la horizontal. A 3 m, delante del niño, hay una alambrada de un recinto deportivo que tiene una altura de 3 m. ¿Qué velocidad mínima debe comunicar al balón para que sobrepase la alambrada?

Resolución

Situación de la experiencia:



Del triángulo rectángulo I:

Vox = Vo . cos α
Voy = Vo . sen α

El balón debe sobrepasar los 2,8 m de altura. Trabajando en el eje OY el balón debe ascender 2,8 m de altura con M.R.U.A.:

$h = Voy \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot t^2$

$h = Vo \cdot sen\ \alpha \cdot t - 1/2 \cdot g \cdot t^2$ (1)

El tiempo que tarda el balón en ascender 2,8 m es:

$Vfy = Voy + (-g) \cdot t$

$Vfy = Voy - g \cdot t$

$Vfy = 0$

$0 = Voy - g \cdot t$

$t = Voy / g$

$t = Vo \cdot sen\ \alpha / g$ (2)

Si llevamos el tiempo de la ecuación (2) y lo llevamos a la ecuación (1):

$2{,}8 = Vo \cdot sen\ 60^o \cdot Vo \cdot sen\ \alpha/g - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (Vo \cdot sen\ \alpha / g)^2$

$2{,}8 = Vo^2 \cdot sen^2\ 60^o / g - \frac{1}{2} \cdot g \cdot Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha / g^2$

$2{,}8 = Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha / g - \frac{1}{2} \cdot Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha / g$

$2{,}8 = \frac{1}{2} \cdot Vo^2 \cdot 0{,}74 / 9{,}81$

$2{,}8 = 0{,}04 \cdot Vo^2$

$Vo = (2{,}8 / 0{,}04)^{1/2} = 8{,}4\ m \cdot s^{-1}$

Ejercicio resuelto

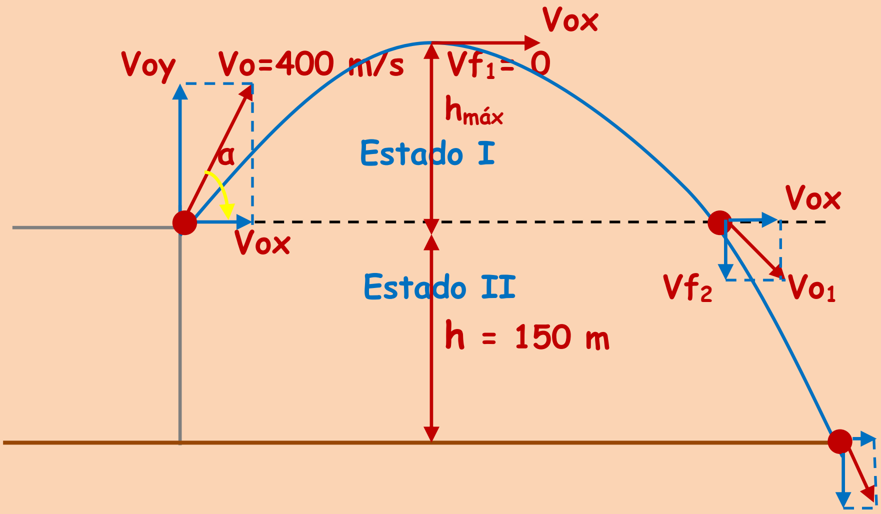
Se lanza un proyectil desde lo alto de un acantilado de 150 m de altura a 400 m/s con una inclinación de 30° . Calcular:

a) El tiempo que tarda en caer al suelo.
b) La altura máxima que alcanza.

Resolución

a)

Gráfico de la experiencia:



ESTADO I

Recordemos:

$Vox = Vo \cdot \cos \alpha$
$Voy = Vo \cdot \text{sen}\ \alpha$

El tiempo necesario para desarrollar el Alcance Máximo es (M.R.U.):

$$\text{Alcance Máximo} = Vox \cdot t$$

$$\text{Alcance Máximo} = Vo \cdot \cos \alpha \cdot t_x$$

El tiempo para desarrollar el alcance máximo es el doble que el correspondiente en alcanzar la altura máxima desde el acantilado. El tiempo para conocer la altura máxima desde el acantilado (M.R.U.A.) es:

$$Vfy = Voy + (-g) \cdot t_y$$

$0 = Vo \cdot sen\ \alpha - g \cdot t_y$
$0 = 400 \cdot 0,5 - 9,81 \cdot t_y$
$0 = 200 - 9,81\ t_y$

$t_y = 200 / 9,81 = 20,4\ s$

$t_x = 2 \cdot t_y$

$t_x = 2 \cdot 20,4 = 40,8\ s$ Estado I

El tiempo para llegar al suelo Estado II:

Se inicia con una Vox = 400 m/s y una V_{fy} que no conocemos y debemos de calcular:

$Vf_{y2} = Vf_{y1} + g \cdot t$

$Vf_{y1} = 0$

$Vf_{y2} = g \cdot t$

$t = Vf_{y2} / g$

Este nuevo tiempo es el utilizado para descender los 150 m de altura del acantilado y es:

$h = Vf_{y2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

$150 = Vf_{y2} \cdot (Vf_{y2} / g) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (Vf_{y2}/g)^2$

$150 = Vf_{y2}^2 / g + \frac{1}{2} \cdot g \cdot Vf_{y2}^2 / g^2$

$150 = Vf_{y2}{}^2/g + \frac{1}{2} \cdot Vf_{y2}{}^2/g$

$150 = 3/2 \cdot Vf_{y2}{}^2 / g$

$Vf_{y2}{}^2 = 150 \cdot 2 \cdot g / 3$;

$Vf_{y2} = (150 \cdot 2 \cdot 9{,}81 / 3)^{1/2} = 31{,}32$ m/s

Con este valor de velocidad nos vamos a la ecuación:

$t = Vf_{y2} / g$

En donde sustituimos Vf_{y2} por su valor obtendremos "t":

$t = 31{,}32 / 9{,}81 = 3{,}19$ s

El tiempo que el proyectil tarda en caer los estados I y II será:

$t_T = 40{,}8 + 3{,}19 = 43{,}99$ s

b)

Altura máxima que alcanza:

ESTADO I:

$h = Voy \cdot ty + \frac{1}{2} \cdot (-g) \cdot ty^2$

$h = Vo \cdot sen\ 30 \cdot ty - 4{,}9 , ty^2$

$ty = 20{,}4$ s

h = 400 . 0,5 . 20,4 – 4,9 . 416,16 =

= 4080 – 2039,18 = 2040,82 m

ESTADO II:

Altura del acantilado = 150 m

Altura máxima alcanzada = hestado I + hestado II =

2040,82 + 150 = 2190,82 m

Ejercicio resuelto

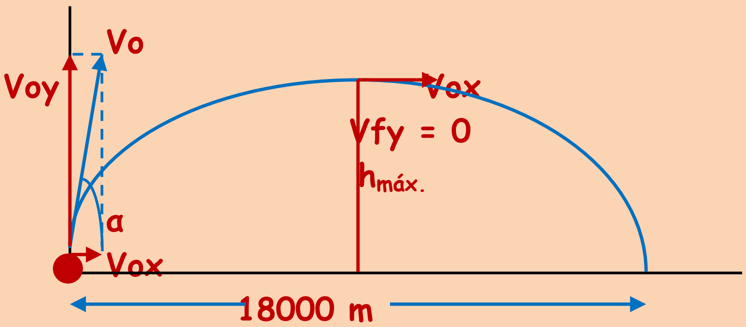
Un cañón dispara proyectiles con una velocidad inicial de 600 m/s. ¿Con qué ángulos se pueden realizar disparos para impactar un objetivo localizado a 18 Km?

Resolución

Vo = 600 m/s

Alcance máximo = 18 ~~Km~~ . 1000 m / 1 ~~Km~~ = 18000 m

Croquis de la experiencia:



En el punto de máxima altura sólo existe componente Vox de la velocidad. La componente Vy es nula.

El alcance máximo es el espacio recorrido por el proyectil en el eje OX en donde se desplaza con M.R.U.:

Alcance máximo = $Vox \cdot t_x$

Recordemos que:

$Vox = Vo \cdot \cos \alpha$

La ecuación anterior quedará de la forma:

Alcance Máximo = $Vo \cdot \cos \alpha \cdot t_x$

La velocidad, en el eje OY, en el punto más alto de la trayectoria viene dada por la ecuación:

$Vfy = Voy + (-g) \cdot t_y$

$Vfy = 0$

$0 = Voy - g \cdot t_y$

Lo que nos permite conocer el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la máxima altura.

$t_y = Voy / g$

Recordemos que:

$Voy = Vo \cdot \text{sen}\ \alpha$

Por lo que:

$t_y = Vo \,.\, sen\, \alpha \,/\, g$

$t_y = 600 \,.\, sen\, \alpha/g$

$t_x = 2\, t_y = 2 \,.\, 600\, sen\, \alpha/g$

Si volvemos a la ecuación del alcancen máximo:

Alcance máximo = $Vox \,.\, t_x$

Alcance máximo = $Vo \,.\, cos\, \alpha \,.\, 2 \,.\, 600\, sen\, \alpha/g$

Alcance máximo = $Vo \,.\, 600 \,.\, 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha/g$ =

= $Vo \,.\, 600 \,.\, sen\, 2\alpha/g$

$18000 = 600 \,.\, 600 \,.\, sen\, 2\alpha/g$

$sen\, 2\alpha = 18000 \,.\, g\, /360000$

$sen\, 2\alpha = 176580/360000 = 0{,}49$

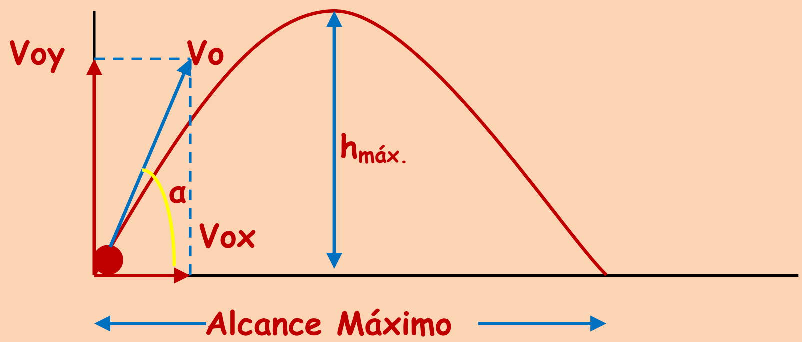
$2\alpha = 29{,}37$; $\alpha = 14{,}68°$

Ejercicio resuelto

Un cuerpo se dispara desde el suelo con una velocidad inicial, Vo, formando un ángulo α. De esta manera, el cuerpo tiene un alcance máximo horizontal, x_{max}. ¿Para qué valor de α se consigue el valor de x_{max}?

Resolución

Esquema de la situación:



El Alcance máximo, como consta en el dibujo, es recorrido por el móvil en el eje OX con M.R.U:

Alcance Máximo = $x_{máx.}$ = Vox . t_x (1)

Según el triángulo de la figura:

Vox = Vo . cos α

La ecuación del alcance máximo quedaría de la forma:

$x_{máx.}$ = Vo . cos α . t_x (2)

El valor de "t_x" lo podemos conocer partiendo del valor del tiempo necesario para obtener la altura máxima ($y_{máx.}$):

$y_{máx.}$ = Voy . ty + ½ . (-g) . t_y^2

$y_{máx.}$ = Voy . t_y – ½ . g . t_y^2

Para un Alcance Máximo la Altura Máxima debe ser igual a cero:

Recordemos que del triángulo de la figura:

$Voy = Vo \cdot sen\ \alpha$

Podemos escribir:

$0 = Vo \cdot sen\ \alpha \cdot t_y - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y^2$

$0 = t_y\ (Vo \cdot sen\ \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y)$

$Vo \cdot sen\ \alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_y = 0$

$2 \cdot Vo \cdot sen\ \alpha = g \cdot t_y$

$t_y = 2\ Vo\ sen\ \alpha/g$

Para este valor de t_y el alcance será máximo: $t_y = t_x$

$x_{máx.} = Vo \cdot cos\ \alpha \cdot\ 2 \cdot Vo \cdot sen\ \alpha\ /g =$

$= Vo^2 \cdot 2\ sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha/g$

$x_{máx.} = Vo^2\ sen\ 2\alpha/g$

Según la última ecuación la $x_{máx.}$ depende del $sen\ 2\alpha$. El valor máximo del seno de cualquier ángulo es la UNIDAD. Luego:

$sen\ 2\alpha = 1$

$2\alpha = 90°$

$\alpha = 90°/2 = 45°$

El alcance será máximo para un ángulo de **45°**.

Ejercicio resuelto

Un proyectil que es disparado por un cañón logra una altura máxima de 500 m y un alcance máximo horizontal de 4 Km. Determinar: a) La velocidad inicial del proyectil; b) El ángulo de disparo; c) El tiempo de vuelo.

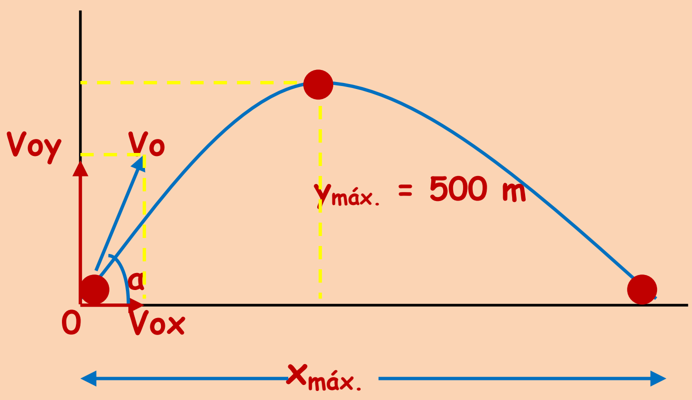
Resolución

a)

Altura Máxima = $y_{máx.}$ = 500 m

Alcance Máximo = xmáx. = 4 ~~Km~~ . 1000 m/ 1 ~~Km~~ = 4000 m

Croquis de la experiencia:



Según el triángulo $\overset{\triangle}{0VoxVo}$:

$Vox = Vo \cdot \cos \alpha$

$Voy = Vo \cdot \text{sen}\ \alpha$

Recordemos que en el eje OY el movimiento del proyectil es M.R.U.A:

$Vfy^2 = Voy^2 + 2 \cdot (-g) \cdot y_{máx.}$

$Vfy = 0$

$0 = Voy^2 - 2 \cdot g \cdot y_{máx.}$

$Voy = (2 \cdot g \cdot y_{máx.})^{1/2}$

$Voy = (2 \cdot 9{,}81 \cdot 500)^{1/2} = 99{,}04$ m/s.

El tiempo que tarda en alcanza dicha altura:

$Vfy = Voy + (-g) \cdot t_y$

$0 = 99{,}04 - 9{,}81\ t_y$

$t_y = 99{,}04 / 9{,}81 = 10{,}1$ s.

El tiempo que se tarda en recorrer el Alcance Máximo, $x_{máx.}$, es el doble que el tiempo anterior:

$t_x = 2 \cdot t_y$; $t_x = 2 \cdot 10{,}1 = 20{,}2$ s

El Alcance Máximo se recorre en el eje OX con M.R.U:

$x_{máx.} = Vox \cdot t_x$

$Vox = x_{máx.} / t_x$

$Vox = 4000$ m / $20{,}2$ s $= 198{,}02$ m/s

Vectorialmente se cumple:

$\vec{V}o = \vec{V}ox + \vec{V}oy$

$| \vec{V}o^2 | = | \vec{V}ox^2 | + | \vec{V}oy^2 |$

$| \vec{V}o | = [(198,02)^2 + (99,04)^2]^{1/2}$

$| \vec{V}o | = (36211,9 + 9808,92)^{1/2}$

Vo = 214,52 m/s (S.I.)

b)

α?

Se cumple:

Voy = Vo . sen α

sen α = Voy / Vo = 99,04 / 214,52 = 0,46

α = 27,5°

c)

El tiempo de vuelo coincide con el tiempo en recorrer el $x_{máx.}$:

$t_{vuelo} = t_x = 20,2$ s

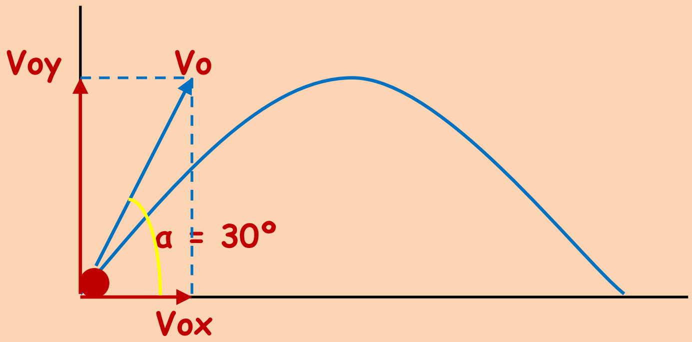
Ejercicio resuelto

Un futbolista patea un balón imprimiéndole una velocidad inicial de 50 m/s con un ángulo de inclinación de 30° grados por encima del césped, determine:

a) La altura máxima.
b) El tiempo de vuelo.
c) El alcance máximo horizontal.
d) La ecuación de la trayectoria.
e) Su rapidez 1 segundo después de haber sido pateado

Resolución

a)



$$Vfy^2 = Voy^2 + 2 \cdot (-g) \cdot y_{máx}$$

En el punto de máxima altura Vfy = 0. La ecuación anterior queda de la forma:

$$0 = Voy^2 - 2 \cdot g \cdot y_{máx.}$$

$$Voy = (2 \cdot 9{,}81 \cdot y_{máx.})^{1/2}$$

Sabemos que:

$$Voy = Vo \cdot sen\ \alpha$$

Por lo que la ecuación anterior queda de la forma:

$Vo \cdot sen\ \alpha = (19{,}62\ y_{máx.})^{1/2}$

Elevando ambos medios de la ecuación al cuadrado nos queda:

$Vo^2 \cdot sen^2\ \alpha = 19{,}62\ y_{máx.}$

$Vo = 50\ m/s$

$\alpha = 30^o$

$2500 \cdot 0{,}25 = 19{,}62\ y_{máx.}$

$625 = 19{,}62\ y_{máx.}$

$y_{máx.} = 625 / 19{,}62$

$y_{máx.} = 31{,}85\ m$

El tiempo necesario para alcanzar $y_{máx}$, lo podemos calcular:

$Vfy = Voy + (-g) \cdot t_y$

$Vfy = 0$

$0 = Voy - g \cdot t_y$

Sabemos que:

$Voy = Vo \cdot sen\ \alpha$

$0 = Vo\ sen\ \alpha - g\ .\ t_y$

$0 = 50\ .\ 0,5 - 9,81\ .\ t_y$

$t_y = 0,5/9,81 = 0,05\ s$

b)

El tiempo de vuelo coincide con el tiempo necesario para rrecorrer el Alcance Máximo, $x_{máx.}$. El $x_{máx.}$ se recorre en el ele OX con M.R.U.

$x_{máx} = Vox\ .\ t_x$

El tiempo de vuelo es el doble que el tiempo necesario para alcanzar ymáx.:

$t_x = 2\ .\ t_y = 2\ .\ 0,05 = 0,1\ s$

c)

$x_{máx.} = Vox\ .\ t_x$

Recordar que:

$Vox = Vo\ .\ cos\ \alpha$

Luego:

$x_{máx.} = Vo\ .\ cos\ \alpha\ .\ t_x$

$x_{máx.} = 50\ .\ 0.87\ .\ 0,1 = 4,35\ m$

d)

La ecuación de la trayectoria tiene la expresión:

$y = f(x)$

La ecuación de la trayectoria la podemos conocer sabiendo la posición que ocupa el móvil en in instante determinado. En el punto de máxima altura las coordenadas de la posición del móvil son:

$Y = y_{máx.} = 31,85$ m
$X = x_{máx.}/2 = 4,35/2 = 2,17$ m

Posición (31,85 , 2,17)

$y_{máx.} = Voy \, . \, ty + (-g) \, . \, ty^2$

$y_{máx.} = Voy \, . \, ty - \frac{1}{2} \, . \, g \, . \, t^2$

$y_{máx.} = Vo \text{ sen } \alpha \, . \, t_y - \frac{1}{2} \, . \, g \, . \, ty^2$

$x_{máx.} = Vox \, . \, t_x$

$x_{máx.} = Vo \cos \alpha \, . \, t_x$

Recordemos que:

$t_x = 2 \, . \, t_y$

$t_y = t_x/2$

Lo llevamos a la expresión de $y_{máx.}$:

$y_{máx.}$ = Vo sen α . t_y – ½ . g . ty^2

$y_{máx.}$ = Vo sen α . $t_x/2$ – ½ . g . ($t_x/2)^2$

Sabemos que:

$x_{máx.}$ = Vo . cos α . t_x

Despejamos t_x:

$t_x = x_{máx.}$/Vo . cos α

$y_{máx.}$ = Vo.sen α.($x_{máx.}$/Vo.cos α)/2 – ½.g.[($x_{máx.}$/Vo. cos α)/2]^2

$y_{máx.}$ = tag α . $x_{máx.}/2$ – ½ . g ($x^2_{máx.}$ /Vo^2 . $\cos^2$ α)/4

$y_{máx.}$ = 0,28 $x_{máx.}$ – 4,9 $x^2_{máx.}$ / Vo^2 . 0,18

$y_{máx.}$ = 0,28 $x_{máx.}$ – 27,2 $x^2_{máx.}$/ Vo^2

De forma general podemos establecer que la ecuación de la trayectoria es:

y = 0,28 x – 27,2 x^2/Vo

------------------ O ------------------