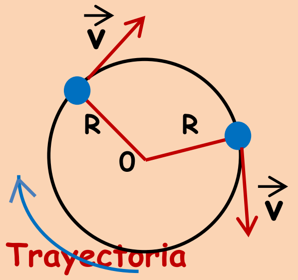
Tema Nº 4
Movimiento Circular

Contenido Temático

1.- Naturaleza del Movimiento Circular

Un movimiento circular es aquel en que la unión de las sucesivas posiciones de un cuerpo a lo largo del tiempo (trayectoria) genera una curva en la que todos sus puntos se encuentran a la misma distancia R de un mismo punto llamado centro.



Este tipo de movimiento al igual que el movimiento rectilíneo puede ser:

a) Movimiento Circular Uniforme M.C.U.
b) Movimiento Circular Uniformemente Acelerado M.C.U.A.

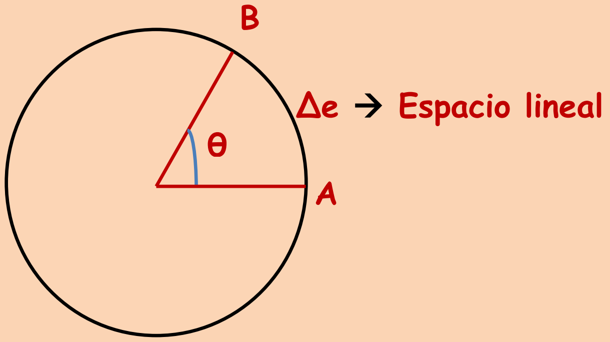
Como ejemplos de Movimientos Circulares tenemos:

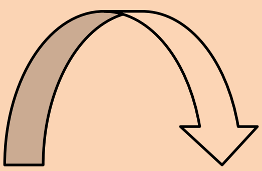
a) La rueda de un carro.
b) Las aspas de una batidora.
c) Las aspas de un ventilador.
d) Una pelota rodando.
e) Un yoyo.
f) La hélice de un avión.

Animación sobre el movimiento circular
Movimiento circular uniforme | Educaplus

1.1.- Movimiento Circular y Velocidad

Basándonos en el siguiente croquis:



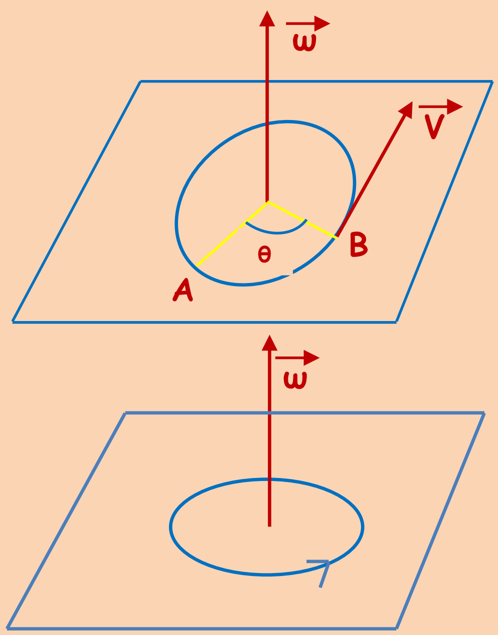


Podemos observar la existencia de dos tipos de espacio recorrido:

a) Un espacio lineal Δe (arco BA)
b) Un espacio angular θ

El espacio lineal se mide en metros y el espacio angular se medir en grados pero es más frecuente hacerlo en radianes.

Veamos el siguiente esquema:



Cuando el cuerpo pasa de la posición A a la posición B lleva dos tipos de velocidades:

a) Velocidad lineal
b) Velocidad angular (ω)

Velocidad Lineal

La podemos definir como el arco de circunferencia descrito en la unidad de tiempo:

V = longitud del arco de circunferencia descrito / t

En definitiva:

$V = \Delta e / \Delta t$

Velocidad angular (ω)

La podemos clasificar en:

a)

Velocidad angular media (ω_m)

Expresada por la ecuación:

$\omega_m = \Delta \theta / \Delta t$ (1)

$w_m = (\theta f - \theta o) / (tf - to)$

En donde:

θ = Espacio angular

b)

Velocidad angular instantánea (ωi)

Que sería el límite de la ecuación (1) cuando el tiempo tiende a cero:

$$\omega_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

Esta igualdad la demostrarán en el tema correspondiente de Matemáticas (Concepto de derivada).

En conclusión:

$\omega = d\theta / dt$ (2)

Si nos adelantamos un poco y definimos el "radián":

El radian es el valor del ángulo central cuyo arco de circunferencia descrito es igual al radio de la circunferencia

radian = arco de circunferencia (Δ e) / Radio

Se cumple que:

$\Delta e = R$

La definición de radian nos permite establecer otra ecuación dentro del movimiento circular:

$\theta = e / R$ (3)

Si llevamos la ecuación (3) a la (2), nos queda:

$$\omega = \frac{d}{dt}\,(e / R)$$

De donde quitando denominadores:

$\omega \cdot R = de/dt$

Recordemos que:

$de/dt = V_{Lineal}$

Por lo que:

$\omega \cdot r = V_{Lineal}$

$V = \omega \cdot R$

Conclusión:

La Velocidad lineal en el Movimiento Circular es igual a la velocidad angular multiplicada por el radio.

Si trabajamos en el S.I. de unidades:

$[V] = m/s$
$[R] = m$
$[\omega] = rad/s$

Cuando utilicemos la ecuación:

$$V = \omega \cdot R$$

Tendremos presente que la posición angular no tiene unidades:

$$Radian = \frac{Arco}{Radio}$$

Si sustituimos unidades en la ecuación anterior:

$$Radian = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}} = 1$$

Aplicando las unidades de V_{lineal} y Radio para obtener la Velocidad angular el radian nunca aparecerá por las razones explicadas. Por ello al aplicar la ecuación:

$$V = \omega \cdot R$$

En el S.I. las unidades son:

[V] = m/s
[R] = m
[ω] = rad/s

2.- Movimiento Circular Uniforme

Estudio del movimiento circular uniforme (M.C.U.)
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/circular/circular.htm

Estudio del movimiento circular uniforme (M.C.U.)
http://newton.cnice.mec.es/materiales_didacticos/mcu/mcu11.htm?0&0

Movimiento Circular Uniforme
quincena2.pdf (educacion.es)

Movimiento Circular Uniforme
Movimiento Circular Uniforme (M.C.U.) (fisicalab.com)

Video: Movimiento Circular Uniforme
https://www.youtube.com/watch?v=i6kJtHpLuLs

En la ecuación:

$\omega = d\theta / dt$

Quitamos denominadores:

$d\theta = \omega \cdot dt$

Integramos los dos miembros de la ecuación:

$\int d\theta = \int \omega \cdot dt$

Como la velocidad angular es constant la podemos sacar del signo de integración:

$\theta = \omega \int dt$

Integramos:

$\theta = \omega \cdot t + C$

C = constante de integración

Si queremos conocer la naturaleza de "C" nos iremos al origen de los tiempos (t = 0):

$\theta = \omega \cdot 0 + C \rightarrow \theta = C$

La constante de integración C tiene las características de un espacio angular, concretamente, el espacio angular inicial (θ_o). Luego:

$\theta = \theta_o + \omega \cdot t$

Ecuación característica del Movimiento Circular Uniforme.

La V_{lineal} de este movimiento también permanece constante:

V_{lineal} = Arco descrito/ unidad de tiempo = e / t

Si ponemos la condición de que no existe espacio angular inicial:

$\theta_o = 0$

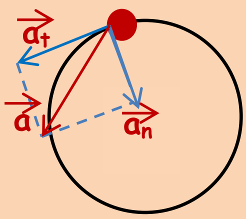
$\theta = \omega \cdot t$

Podríamos definir el Movimiento Circular Uniforme como aquel en donde a intervalos iguales de tiempo se describen espacios angulares iguales.

Existe una pregunta clásica de examen ¿ Existe algún movimiento uniforme que tenga aceleración?.

R: Sí. El M.C.U que teniendo una velocidad lineal constante tiene una a_n que es la que hace que el móvil describa la circunferencia.

Si recordamos las Componentes Intrínsecas de la aceleración:



Al ser la V_{lineal} constante y recordando que:

$a_t = dV/dt$

La derivada de una constante es cero. Esta es la razón por la cual la a_t no existe en el movimiento circular uniforme.

El módulo del vector velocidad permanece constante pero sin embargo la dirección de este vector está variando continuamente. Tiene que existir una aceleración en dirección radial que justifique los cambios de dirección de V_{lineal}. Esta aceleración se conoce como "aceleración normal", a_n .

La aceleración normal la podemos conocer mediante la ecuación:

$a_n = V^2 / R$

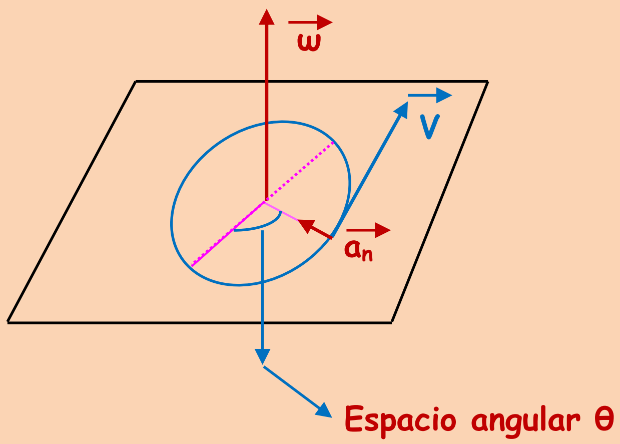
Llegamos a la conclusión de que la velocidad angular goza de las siguientes características:

1.- Se trata de una magnitud vectorial

2.- Posee un módulo que viene dado por la ecuación:
$w = v / r$

3.- Su dirección es perpendicular al plano en donde se está describiendo la trayectoria.

4.- Su sentido es el mismo que el sentido de giro del móvil



Recordemos que el radian es el valor del ángulo central cuyo arco de circunferencia descrito es igual al radio de la circunferencia:

1 radian = arco de circunferencia (Δ e) / Radio

De la ecuación:

$\theta = e / R$

Podemos deducir que el espacio lineal es igual al espacio angular por el radio:

$e = \theta \cdot R$

Recordemos que las unidades de la velocidad angular son:

$rad/t = rad \cdot t^{-1}$

También se utiliza la unidad **rpm** (revoluciones / minuto = vueltas / minuto).

En este movimiento por tanto la velocidad angular, ω, permanece constante, independientemente de la posición que ocupe el cuerpo.

La relación entre las dos velocidades (ya se demostró) de este movimiento viene dado por la ecuación:

$V = \omega \cdot R$ (3)

Cómo la velocidad angular es constante y el radio tiene un valor determinado, la velocidad lineal también permanece constante, con la condición de no variar la posición del cuerpo. De todas formas, en otra posición y por la misma ecuación anterior la velocidad lineal será distinta a la primera pero también constante.

En la ecuación (3) deberemos trabajar con las siguientes unidades:

V → m/s ; ω → rad/s ; R = m

2.1.- Periodo y Frecuencia en el Movimiento Circular Uniforme

En el **Movimiento Circular Uniforme** existen dos magnitudes que nos permiten conocer la velocidad angular del movimiento. Estas son:

a) Periodo (T) .- Tiempo que se tarda en describir una vuelta completa. Su unidad es el segundo (s).

b) Frecuencia (ƒ) .- Número de vueltas descritas en la unidad de tiempo.

Las unidades de la frecuencia son:

ƒ = nº de vueltas / s

El nº de vueltas no tiene unidades por lo que la unidad de frecuencia es:

ƒ = 1/s = s^{-1} = Hercio (Hz) (1)

Podemos establecer que:

ƒ = 1/T

Ecuación, esta última que, relaciona la Frecuencia y el Periodo. También podemos escribir despejando el Periodo de la última ecuación:

$T = 1 / f$

Si suponemos que el móvil ha descrito una vuelta completa podemos establecer las siguientes ecuaciones:

ω = ángulo / t

Una vuelta completa implica 2π rad y el tiempo utilizado ya lo hemos definido, T:

$\omega = 2\pi / T$ (rad/s) (2)

Si llevamos la ecuación:

$T = 1 / f$

A la ecuación (2), obtenemos:

$\omega = 2\pi / (1/f) = 2\pi \cdot f$

Ejercicio resuelto

Define radián como unidad de medida de ángulos.
¿Cuántos radianes hay en un ángulo de 1800?
¿Cuántos grados contiene un ángulo de 3 $\pi/2$ radianes?
¿Cuántos radianes son 30°?
¿cuántos grados sexagesimales son 1 radián?

Resolución

Radian es el valor del ángulo central cuyo arco de circunferencia descrito es igual al radio de la misma.

Debemos saber que 2 π = 360°.

$$1800\cancel{^{o}}\ \frac{2\,\pi\ \text{rad}}{360\cancel{^{o}}} = 10\,\pi\ \text{rad}$$

$$3\,\cancel{\pi}\,/\,2\ \cancel{\text{rad}}\ .\ \frac{360^{o}}{2\,\cancel{\pi}\ \cancel{\text{rad}}} = 270^{o}$$

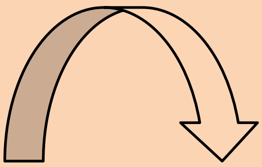
$$30\cancel{^{o}}\ .\ \frac{2\,\pi\ \text{rad}}{360\cancel{^{o}}} = 0{,}17\,\pi\ \text{rad}$$

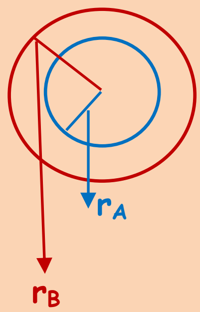
$$1\ \cancel{\text{rad}}\ .\ \frac{360^{o}}{2\,\pi\ \cancel{\text{rad}}.} = \frac{360^{o}}{2\ .\ 3{,}14} = 57{,}32^{o}$$

Ejercicio resuelto

Dos puntos A y B de una plataforma giratoria se encuentran respectivamente, a 2 m y 3'5 m del centro de dicha plataforma. Si la velocidad lineal de A es de 6 m/s, ¿cuál es la de B? Calcular las velocidades angulares de ambos puntos.

Resolución





Datos:

r_A = 2 m
r_B = 3'5 m
v_A = 6 m/s
v_B = ¿?

Se trata de un M.C.U, por tanto:

$v = \omega \cdot r$

$V_A = \omega_A \cdot r_A$

$6\ m/s = \omega_A \cdot 2\ m$

$\omega_A = 3\ rad/s$

Como A y B se encuentran en la misma plataforma giratoria, han de girar los dos con la misma velocidad angular, pero distinta velocidad lineal por estar a diferentes distancias del centro y por tanto, recorrer circunferencias diferentes al mismo ritmo.

$\omega_A = 3\ rad/s$

$\omega_B = 3\ rad/s$

De este modo:

$V_B = \omega_B \cdot r_B$

V_B = 3 rad/s . 3'5 = 10'5 m/s

Ejercicio resuelto

Una rueda gira a razón de 30 π rad/s. Calcular cuántas vueltas da en 15 minutos.

Resolución

Unidades al S.I.:

$15 \cancel{min} \cdot 60\ s / 1 \cancel{min} = 900\ s$

No existe fórmula que nos determine directamente el número de vueltas dadas. Debemos conocer primero el espacio angular descrito.

Sabemos que :

$\omega = \theta / t$

$\omega = \omega \cdot t = (30\ \pi\ rad/\cancel{s}) \cdot 900\ \cancel{s} = 27000\ \pi\ rad$

Recordemos que 1 vuelta = 2 π rad

$$27000\ \cancel{\pi}\ \cancel{rad} \cdot \frac{1\ vuelta}{2\ \cancel{\pi}\ \cancel{rad}} = 13500\ vueltas$$

Ejercicio resuelto
Calcula la velocidad angular y lineal que lleva la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Radio de la órbita terrestre: 150 millones de kilómetros.

Resolución

Suponiendo que la órbita de la Tierra, alrededor del Sol, es una circunferencia podremos realizar el ejercicio.

La Tierra tarda 365 días en dar una vuelta completa alrededor del Sol. Si pasamos los días a segundos:

$365\ \cancel{\text{días}} \cdot (24\ \cancel{h} / \cancel{\text{día}}) \cdot (3600\ s/\cancel{h}) = 31536000\ s =$

$= T$ (tiempo necesario para dar una vuelta completa)

Recordemos que:

$\omega = 2\pi / T = 2.\pi\ rad/31536000\ s = 6{,}34 \cdot 10^{-8}\ \pi\ rad/s$

Pasemos el radio de la órbita terrestre a metros:

$150 \cdot 10^{6}\ \cancel{Km} \cdot 1000\ m / \cancel{Km} = 150 \cdot 10^{9}\ m$

Como:

$V = \omega \cdot R$

$V = 6{,}34 \cdot 10^{-8}\ \pi\ rad/s \cdot 150 \cdot 10^{9}\ m = 9510\ m/s$

Ejercicio resuelto
La rueda de una moto tiene 60 cm de diámetro. Cuando la moto va 40 km/h, calcula la velocidad angular de la rueda, su período, la frecuencia en Hz y en rpm.

Resolución

$R = 60/2\ cm = 30\ \cancel{cm} \cdot 1\ m/100\ \cancel{cm} = 0{,}30\ m$

$(40\ \cancel{Km}/\cancel{h}) \cdot (1000\ m/\cancel{Km}) \cdot (1\ \cancel{h}/\ 3600\ s) = 11{,}11\ m/s$

La velocidad angular la calcularemos de la forma:

$V = \omega \cdot R$

$\omega = V / R = (11{,}11\ \cancel{m}/s) / 0{,}30\ \cancel{m} = 37{,}03\ rad/s$

Para conocer el período utilizaremos la ecuación:

$\omega = 2\ \pi / T$

$T = 2\ \pi / \omega = 2\ \pi\ \cancel{rad} / 37{,}03\ (\cancel{rad}/s) = 0{,}17\ s$

La frecuencia:

$f = 1 / T = 1 / 0{,}17\ s = 5{,}88\ 1/s = 5{,}88\ s^{-1}(Hz)$

La velocidad angular en rpm serán:

$(37{,}03\ \cancel{rad}/\cancel{s}) \cdot (1\ vuelta/2\ \pi\ \cancel{rad}) \cdot (60\ \cancel{s}/1\ min) =$

$= 353{,}8$ vueltas/min $= 353{,}8$ rpm (vuelta = revolución)

Ejercicio resuelto
Calcula la velocidad angular de cada una de las agujas del reloj. Si el segundero mide 3 cm de longitud, ¿con qué velocidad se mueve su extremo?.

Resolución

Aguja horario: Describe una vuelta completa en 12 h

$12 \cancel{h} \cdot (3600\ s/1 \cancel{h}) = 43200\ s = T$ (Periodo)

1 vuelta = $2\ \pi$ rad

Sabemos que:

$\omega = 2\ \pi / T = 2\ \pi\ rad / 43200\ s = 4{,}6 \cdot 10^{-5}\ \pi\ rad/s$

Aguja minutero: Describe una vuelta en 1 h

$1 \cancel{h} \cdot (3600\ s / 1 \cancel{h}) = 3600\ s$

1 vuelta = $2\ \pi$ rad

$\omega = 2\ \pi / T = 2\ \pi\ rad / 3600\ s = 5{,}55 \cdot 10^{-4}\ rad / s$

Aguja segundero: Describe una vuelta completa en un minuto.

$$\omega = 1\ \frac{\cancel{vuelta}}{\cancel{min}} \cdot \frac{2\ \pi\ rad}{1\ \cancel{vuelta}} \cdot \frac{1\ \cancel{min}}{60\ s} = 0{,}07\ \pi\ rad / s$$

Recordemos que:

$V = \omega \cdot R$ (1)

$3 \cancel{cm} \cdot (1\ m / 100 \cancel{cm}) = 0{,}03\ m$

Volviendo a la ecuación (1):

$V = 0,07\ \pi\ rad/s\ .\ 0,03\ m = 2,1\ .\ 10^{-3}\ m.s^{-1}$

Cuestión resuelta

Responde brevemente a las siguientes cuestiones:
a) Dos ruedas, una grande y otra pequeña, giran con la misma velocidad angular. ¿cuál de ellas da más vueltas en el mismo tiempo?
b) ¿cuál de las ruedas del caso anterior tiene mayor velocidad lineal?

Resolución

a)

$R_A > R_B\ ;\ \ \omega_A = \omega_B\ ;\ \ t_A = t_B$

ω = espacio angular / t

Espacio angular:

$\theta = \omega\ .\ t$

El θ es el mismo para las dos ruedas ($\omega_A = \omega_B$,$t_A = t_B$) y como el número de vueltas depende de θ:

1 vuelta = 2 π rad

Las dos ruedas describen las mismas vueltas b)

Recordemos:

$V = \omega \cdot R$

La velocidad lineal depende de ω (es la misma para las dos Ruedas) y del Radio. Como $R_A > R_B$, la rueda A lleva mayor Velocidad lineal.

Problema resuelto

Un pastor hace rotar una honda a 3 r.p.s. calcula la frecuencia y periodo de giro.

Resolución

La honda lleva una velocidad angular de:

$$3\ \frac{\cancel{\text{revoluciones}}}{\text{s}} \cdot \frac{2\ \pi\ \text{rad}}{\cancel{1}\ \cancel{\text{Revol.}}} = 6\ \pi\ \text{rad / s}$$

Recordemos que:

$\omega = 2\ \pi / T$

$T = 2\ \pi / \omega = 2\ \pi / 6\ \pi\ (\cancel{\text{rad}}/\text{s}) = 0,33\ \text{s}$

Por otra parte:

$f = 1 / T$

$f\ = 1 / 0,33\ \text{s} = 3,03\ \ (1/\text{s}) = 3,03\ \text{s}^{-1} = 3,03\ \text{Hz}$

Problema resuelto

Determina la velocidad angular de rotación de la Tierra alrededor de su eje y la velocidad lineal de un punto situado sobre el ecuador, sabiendo que su perímetro es de 40.000 Km.

Resolución

Datos: La Tierra describe una vuelta en su rotación de 24 h.

$24 \cancel{h} \cdot (3600\ s / 1\cancel{h}) = 86400\ s$

$40000 \cancel{Km} \cdot (1000\ m / 1 \cancel{Km}) = 4 \cdot 10^7\ m$

La velocidad angular de rotación es:

$\omega = 2\pi / T = 2\pi\ rad / 86400\ s = 2,3 \cdot 10^{-5}\ rad/s$

El perímetro coincide con la longitud de la trayectoria. La trayectoria es una circunferencia y su longitud vale:

$L = 2\pi R$

$R = L / 2\pi = 4 \cdot 10^7\ m / 2\pi\ rad = 2/\pi \cdot 10^7\ m$

Como :

$V = \omega \cdot R$

$V = 2,3 \cdot 10^{-5}\ rad/s \cdot 2/\pi \cdot 10^7\ m = 0,73\ m \cdot s^{-1}$

3.- Movimiento Circular Uniformemente Acelerado (M.C.U.A.)

Video: Movimiento Circular Uniformemente Acelerado
https://www.youtube.com/watch?v=DnTL4wDAbK0

Movimiento circular uniformemente acelerado (M.C.U.A)
http://www.slideshare.net/tavogx/movimiento-circular-uniformemente-acelerado

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado
Movimiento circular uniformemente acelerado - Definición Ejemplos y Ejercicios | Fhybea

Movimiento Circular Uniformemente Acelerado
Movimiento circular. Casos particulares (ehu.es)

En este movimiento ocurre lo mismo que en el M.C.U. Si allí existían dos tipos de velocidad (lineal y angular), en el M.C.U.A existen dos aceleraciones (tangencial y angular).

Aceleración angular media

Viene expresada por la ecuación:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\alpha_m = (\omega f - \omega o)/(tf - to)$$

En donde:

α_m = Aceleración angular media

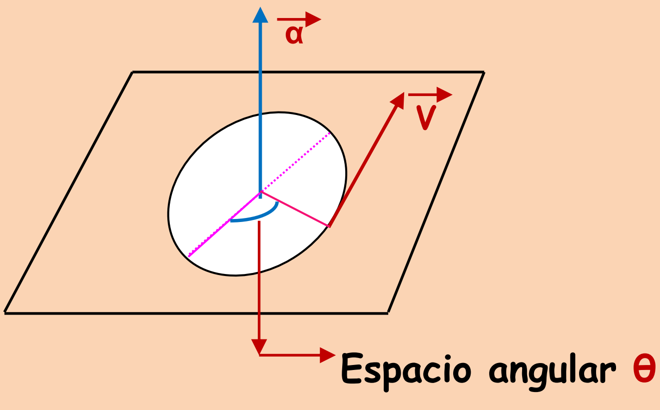
Aceleración angular instantánea.-

Su expresión matemática:

$$\alpha_i = \vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

La aceleración angular es una magnitud vectorial con las siguientes características:

1.- Posee un módulo que viene determinado por la ecuación:
$\alpha = \omega / t$
2.- Su dirección es perpendicular al plano donde el móvil describe el movimiento circular.
3.- Su sentido lo determina el sentido de giro del móvil.

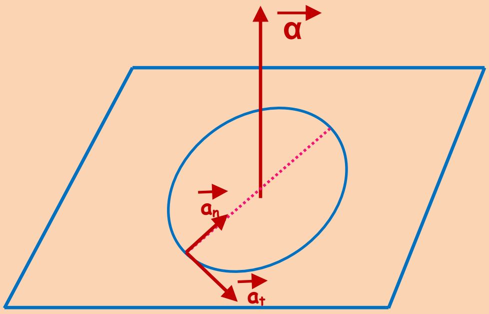


La unidad de aceleración angular en el S.I.:

$rad/s^2 = rad \cdot s^{-2}$

Como se dijo en este movimiento existen las dos componentes intrínsecas de la aceleración:

a) La aceleración tangencial, $\vec{a}_t$, que es constante
b) La aceleración normal, $\vec{a}_n$, que es variable



Para relacionar las diferentes magnitudes del M.C.U.A partiremos de la ecuación:

$\alpha = d\omega / dt$

Si quitamos denominadores nos queda:

$d\omega = \alpha \cdot dt$

Si integramos los dos medios de la ecuación:

$$\int d\omega = \int \alpha \cdot dt$$

Como la aceleración angular es constante la podemos sacar del signo de integración:

$$\int d\omega = \alpha \int dt$$

$\omega = \alpha \cdot t + C \quad (1)$

Si queremos conocer la naturaleza de "C" nos iremos al origen de los tiempos (t = 0) y nos quedará:

$\omega = \alpha \cdot 0 + C$

$\omega = C$

La naturaleza de la constante de integración es de una velocidad angular concretamente la velocidad angular inicial, ω_o.

La ecuación (1) queda de la forma:

$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t \quad (2)$

Si recordamos que:

$\omega = d\theta / dt$

$d\theta = \omega \cdot dt$

Integramos los dos miembros de la última ecuación:

$$\int d\theta = \int \omega \cdot dt$$

Llevamos la ecuación (2) a la ecuación anterior:

$$\int d\theta = \int (\omega_o + \alpha \cdot t) \, dt$$

$$\int d\theta = \int \omega_o \cdot dt + \int \alpha \cdot t \, dt$$

$\theta = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 + C$ (3)

Si hacemos t = 0:

$\theta = \omega_o \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 0 + C$

$\theta = C$

La naturaleza de "*C*" es la de un espacio angular concretamente el espacio angular inicial, θo, que llevado a (3):

$\theta = \theta o + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ (4)

Si hacemos que $\theta_o = 0$:

$\theta = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ (5)

Junto con la ecuación:

$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t$ (6)

Formarían un sistema en donde despejando "t" de (6) y llevándolo a (5):

$\omega^2 = \omega_o^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \theta$ (7)

Por último sólo nos queda establecer la relación entre la aceleración lineal y la aceleración angular. Recordemos del M.C.U. la ecuación:

$v = \omega \cdot r$

Derivemos los dos miembros respecto al tiempo:

$$dv / dt = \frac{d}{dt} (\omega \cdot r) \quad (8)$$

Recordemos:

$a = dv/dt$

En donde "a" es la aceleración lineal. La llevamos a la ecuación (8):

$a = \omega \cdot dr/dt + r \cdot d\omega / dt$

Como r = const → su derivada es igual a cero:

$a = \omega \cdot 0 + r \cdot d\omega / dt$

La aceleración angular queda determinada por la ecuación:

α (aceleración angular) = $d\omega/dt$

La llevamos a la ecuación anterior:

$a = r \cdot \alpha$

$a = \alpha \cdot r$

La conclusión de la ecuación anterior:

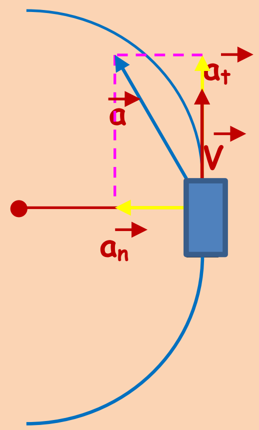
"La aceleración lineal es igual al producto de la aceleración angular por el radio"

Se han demostrado las ecuaciones del **M.C.U.A.**

Ejercicio resuelto

Un coche toma una curva de 100 m de radio con una aceleración tangencial de 5 ms^{-2}. Calcula la aceleración total a la que está sometido en el instante en que su velocidad sea 72 $Km.h^{-1}$.

Resolución



$V = (72\ \cancel{Km}/\cancel{h}).(1000\ m/1\ \cancel{Km}).(1\ \cancel{h}/3600\ s) = 72000/\ 3600 =$

$= 20\ m/s$

R = 100 m

$a_t = 5\ m/s^2$

La aceleración total, vectorialmente, será la suma de las aceleraciones que actúen en la experiencia:

$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$

$|\ \vec{a}\ |^2 = |\ \vec{a_t}\ |^2 + |\ \vec{a_n}\ |^2$

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$

$a = (a_t^2 + a_n^2)^{1/2}$ (1)

$a_t = 5 \text{ m/s}^2$

$a_n = V^2/R$

$a_n = (20 \text{ m/s})^2/100 \text{ m} = 4 \text{ m/s}^2$

Llevando los datos a la ecuación (1):

$a = (5^2 + 4^2)^{1/2} = 6{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Ejercicio resuelto

Sobre un punto de la periferia de una plataforma circular giratoria de 80 cm de radio se encuentra un pequeño objeto que gira solidariamente con la plataforma. El objeto posee una aceleración constante dirigida hacia el centro de 32 ms^{-2}.

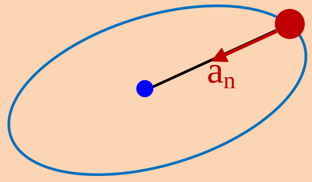
a) Calcula la velocidad a la que gira la plataforma.
b) Si se traslada el objeto en dirección radial hasta situarlo a 60 cm del centro ¿Variará su aceleración? En caso afirmativo calcula el nuevo valor.

Resolución

a)

$R = 80 \cancel{\text{cm}} \cdot (1 \text{ m}/100 \cancel{\text{cm}}) = 0{,}80 \text{ m}$

La aceleración que actúa sobre el cuerpo es la "a_n":



$a_n = V^2/R$

$32 = V^2/0{,}80$

$V = (32 \cdot 0{,}80)^{1/2}$

$V = 5{,}06\ m \cdot s^{-1}$ (S.I.)

b)

SI, puesto que varía el radio:

$R = 60\ \cancel{cm} \cdot (1\ m/100\ \cancel{cm}) = 0{,}60\ m$

$a_n = V^2/R$

Como el problema no dice nada respecto a la velocidad deberemos tomarla como constante (5,06 m/s):

$a_n = (5{,}06)^2/0{,}60 = 42{,}67\ m \cdot s^{-2}$ (S.I.)

Ejercicio resuelto
Una rueda de 15 cm de radio se pone en movimiento con una aceleración angular de 0,2 rad/s^2. Halla el tiempo que tarda la rueda en dar 20 vueltas.

Resolución

No existe ecuación alguna que nos determine el número de vueltas. Pero sabemos que una vuelta implica 2π rad:

1 vuelta / 2π rad

El espacio angular correspondiente a 20 vueltas es:

$20 \cancel{\text{vueltas}} \cdot (2\pi \text{ rad.}/1 \cancel{\text{vuelta}}) = 40\pi \text{ rad.}$

El problema no dice nada respecto a un espacio angular inicial. Supondremos $\theta o = 0$.

La rueda parte del reposo por lo que $\omega_o = 0$.

$\theta o = 0$
$\omega_o = 0$

El espacio angular viene dado por la ecuación:

$\theta = \theta o + Wo \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

$\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

$40\pi = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot t^2$

$t = (80 \cdot 3{,}14 / 0{,}2)^{1/2} = 35{,}4 \text{ s}$

Ejercicio resuelto

Un volante con aceleración constante gira un ángulo θ de 234 rad en los tres primeros segundos, si su velocidad angular, al final de ese tiempo es de 108 rad/s. Calcular: a) la velocidad angular inicial y la aceleración angular en ese intervalo ; b) la aceleración angular con que frena si se detiene en 1,5 s; c) el número de vueltas que da mientras frena.

Resolución

$\theta = 234$ rad

$t = 3$ s

$\omega_f = 108$ rad/s

a)

$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot t$

Despejaremos ω_o:

$\omega_o = \omega_f - \alpha \cdot t$ (1)

Lo llevaremos a la ecuación:

$\theta = \omega_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ (2)

$\theta = (\omega_f - \alpha \cdot t) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

$\theta = \omega_f \cdot t - \alpha \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

$234 = 108 \cdot 3 - \alpha \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot 3^2$

$234 - 318 = - \alpha \cdot 9 + 0,5 \cdot \alpha \cdot 9$

$-84 = -9\,\alpha + 4,5\,\alpha$

$-84 = -4,5\,\alpha$

$\alpha = 18,7\ rad.\ s^{-2}$

Volvemos a la ecuación (1):

$\omega_o = 108 - 18,7 \cdot 3 = 108 - 56,1 = 51,9\ rad \cdot s^{-1}$ (S.I.)

b)

$t = 1,5\ s$
$\omega_f = 0$
$\omega_o = 51,9\ rad/s$

$\omega f = \omega o + \alpha \cdot t$

$0 = 51,9 + \alpha \cdot 1,5$

$- 51,9 = 1,5\,\alpha$

$\alpha = -34,6\ rad/s^2$

c)

Espacio angular descrito hasta que se para:

$\theta = \omega o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

$\theta = 51,9 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot (-34,6) \cdot 2,25$

$\theta = 77,85 - 38,92 = 38,93$ rad.

Recordemos que:

1 vuelta / 2π rad

38,93 $\cancel{\text{rad}}$. (1 vuelta / 2π $\cancel{\text{rad}}$) = 6,2 vueltas

Ejercicio resuelto

Una rueda de 20 cm de radio gira con una velocidad angular de 60 rpm., deteniéndose en 5 segundos por acción de un freno. Si el movimiento uniformemente retardado, determina:

a) La aceleración del movimiento.
b) El número de revoluciones que describe la rueda hasta parar.
c) La velocidad y la aceleración de un punto de la periferia de la rueda en el instante t = 3 s.

Resolución

a)

R = 20 $\cancel{\text{cm}}$. (1 m/100 $\cancel{\text{cm}}$) = 0,20 m

ω_o =60 rpm =(60 $\cancel{\text{vueltas}}$/$\cancel{\text{min}}$).(2π rad/1 $\cancel{\text{vuelta}}$).(1 $\cancel{\text{min}}$/60 s)

ω_o = 2π rad/s

t = 5 s

$\omega = \omega_o + \alpha \cdot t$

$0 = 2\pi + \alpha \,.\, 5$

$-2\pi = 5\,\alpha$

$\alpha = -\,0{,}4\pi\ rad/s^2$ (S.I.)

b)

$\theta = \omega_o \,.\, t + \frac{1}{2} \,.\, \alpha \,.\, t^2$

$\theta = 2\pi \,.\, 5 + \frac{1}{2} \,.\, (-0{,}4\pi) \,.\, 25$

$\theta = 10\pi - 5\pi = 5\pi = 15{,}7\ rad$

Recordemos:

Vuelta = Revolucion

1 vuelta/2π rad

$15{,}7\ \cancel{rad} \,.\, (1\ vuelta/6{,}28\ \cancel{rad}) = 2{,}5$ vueltas

c)

El ejercicio no especifica si es velocidad lineal o angular la que nos pide y exactamente lo mismo ocurre con la aceleración. Intentaré resolver la cuestión suponiendo que son las dos magnitudes lo que pide:

Recordaremos que:

$a_{lineal} = \alpha \,.\, R$

La aceleración angular la conocemos y vale $\alpha = -0{,}4\pi\ rad/s^2$ y es constante durante todo el movimiento. El radio tiene un valor de 0,20 m, luego:

$a = -0{,}4\pi \cdot 0{,}20 = -0{,}25\ m \cdot s^{-2}$ (S.I.)

En lo referente a la velocidad angular:

$\omega f_{(3)} = \omega o + \alpha \cdot t$

$\omega f_{(3)} = 2\pi + (-\alpha) \cdot t$

$\omega f_{(3)} = 2\pi - 0{,}4\pi \cdot 3 =$

$\omega f_{(3)} = 6{,}28 - 3{,}77 = 2{,}51\ rad/s$

Sabemos que:

$V_{lineal} = \omega \cdot R$

$V_{lineal} = 2{,}51 \cdot 0{,}20 = 0{,}50\ m \cdot s^{-1}$ (S.I.)

Ejercicio resuelto

Un móvil que pate del reposo sigue una trayectoria circular de 3 cm de radio con una aceleración angular constante igual $\alpha = \pi\ rad/s^2$.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en dar una vuelta completa.
b) ¿Qué distancia recorre en ese tiempo?.
c) ¿Cuál es su velocidad angular cuando t = 0,5 s?.
d) ¿Cuánto vale la aceleración tangencial y normal en ese instante?

Resolución

a)

$R = 3\ \cancel{cm}\ .\ (1\ m/100\ \cancel{cm}) = 0{,}03\ m$

$\alpha = \pi\ rad/s^2$
$Vo = 0$
$Wo = 0$
$\theta o = 0$

1 vuelta / 2π rad.

El espacio angular vale (1 vuelta) → $\theta = 2\pi\ rad$

$\theta = \theta o + \omega o\ .\ t + \frac{1}{2}\ .\ \alpha\ .\ t^2$

$\theta o = 0$ y $\omega o = 0$

$\theta = \frac{1}{2}\ .\ \alpha\ .\ t^2$

$2\pi = \frac{1}{2}\ .\ \pi\ .\ t^2$

$t = (\ 4\pi/\pi\ )^{1/2} = 2\ s$

b)

Conocemos la definición de radian: El ángulo central cuyo arco es igual al radio:

Rad = arco/ R → θ = longitud / R

θ = 1 vuelta → 2π rad

De (1):

Longitud = θ . R = 2π . R = 2 . 3,14 . 0,03 = 0,19 m (S.I.)

c)

$\omega_{(0,5)} = \omega_o + \alpha \cdot t$

$\omega_{(0,5)} = 0 + \pi \cdot 0,5 = 1,57$ rad/s

d)

Como la aceleración angular es constante, la aceleración tangencial también lo es. La aceleración tangencial la calculamos:

$a_t = a_{lineal} = \alpha \cdot R = \pi \cdot 0,03 = 0,09$ m/s^2 (S.I.)

La aceleración normal tiene su ecuación:

$a_n = V^2/R$ (2)

Para t = 0,5 s → ω = 1,57 rad/s

$V_{lineal} = \omega \cdot R = 1,57 \cdot 0,03 = 0,047$ m/s (S.I.)

Si nos vamos a (2):

$a_n = (0,047)^2/0,03 = 0,073$ m . s^{-2} (S.I.)

Ejercicio resuelto

Un disco de 40 cm de diámetro, con una aceleración angular constante, necesita 4 segundos para girar un ángulo de 20 rad y alcanzar una velocidad angular de 8 rad/s. Determinar la aceleración tangencial y la velocidad lineal inicial para un punto situado en el borde del disco.

Resolución

R = ½ . Diametro = ½ . 0,40 = 0,2 m
α = Const.
t = 4 s → θ = 20 rad. → Wf = 8 rad/s

Recordemos las ecuaciones:

$\theta = \theta o + \omega o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$ (1)

$Vf = \omega f \cdot R$

$Vf = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$ m/s (S.I.)

$a_{lineal} = a_t = \alpha \cdot R$

En el M.R.U.A.:

$Vf = Vo + a \cdot t$

$a = Vf - Vo / t$ (2)

Llevemos a (1) los datos obtenidos:

$\theta = \omega o \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot a_{lineal}/R \cdot 4^2$

20 = (Vo/R) . 4 + ½ . [(Vf – Vo/t)/R] . 4^2

20 = (Vo/0,2) . 4 + 8 . (Vf – Vo/4)/0,2 .

20 = 20 Vo + 8 . (1,6 – Vo/4)/0,2

20 . 0,2 = 20 . 0,2 Vo + 2 . (1,6 – Vo)

4 = 4 Vo + 2 . (1,6 – Vo)

4 = 4 Vo + 3,2 – 2 Vo

4 – 3,2 = 2 Vo

0,8 = 2 Vo

Vo = 0,4 m/s

En lo referente a la aceleración tangencial:

$a_{lineal} = a_t = Vf – Vo / t$

a_t = 1,6 – 0,4 / 4 = 0,3 m/s^2 (S.I.)

Ejercicio resuelto

Un disco que gira a 900 rpm es frenado con una desaceleración angular de 3π $rad.s^{-2}$. ¿Cuántos segundos requerirá para detenerse y cuantas vueltas dará?

Resolución

$\omega o = (900\ \cancel{rev}ol/\cancel{min}) \cdot (2\pi\ rad/\cancel{rev}ol) \cdot (1\ \cancel{min}/\ 60\ s) =$

$= 30\pi\ rad/s$

$\alpha = -\ 3\pi\ rad/s^2$
$\omega f = 0$

Recordemos:

$\omega f = \omega o + \alpha \cdot t$

$0 = 30\pi + (-3\pi) \cdot t$

$3\pi \cdot t = 30\pi$

$t = 10\ s$

En lo referente al nº de vueltas debemos calcular primero el espacio angular descrito:

$\theta = \omega o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$

$\theta = 30\pi \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot (-3\pi) \cdot 3^2 = 300\pi - 13{,}5\pi =$

$= 286{,}5\pi = 899{,}61\ rad$

La proporción:

1 vuelta (revolución) / 2π rad.

Por tanto:

$899{,}61\ rad \cdot 1\ vuelta/\ 2\pi\ rad$

$(899,61\ \cancel{rad}) \cdot (1\ vuelta / 6,28\ \cancel{rad}) =$ **143,25 vueltas**

Ejercicio resuelto

En una pista circular de 120 m de diámetro un motociclista parte del reposo y en 10 segundos alcanza una velocidad de 90 Km/h, acelerando de manera uniforme. Determinar:

a) La distancia recorrida.
b) La aceleración tangencial.
c) La aceleración normal en el instante t = 10 s.

Resolución:

a)

$R = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60\ m$
$V_o = 0$
$\omega_o = 0$
$t = 10\ s$

$V_f = (90\ \cancel{Km}/\cancel{h}) \cdot (1000\ m / 1\ \cancel{Km}) \cdot (1\ \cancel{h}/3600\ s) = 25\ m/s$

Según el M.R.U.A.:

$V_f = V_o + a \cdot t$

$25 = 0 + a \cdot 10$

$a = 2,5\ m/s^2$.

El espacio recorrido lo podemos calcular:

$e = Vo \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

$Vo = 0$

$e = \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 10^2 = 125$ m (S.I.)

b)

La aceleración tangencial, at, se calculó en el apartado anterior:

$a_t = a = 2,5 \text{ m} \cdot s^{-2}$

c)

$a_n = V^2/R$

$a_n = (25)^2/60 = 10,42 \text{ m} \cdot s^{-2}$

----------------- O ----------------